UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120
Eksamensdag:	Onsdag 12. desember 2018
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	5 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Oppgave 1: Parallelle linjer

a) En ladning q befinner seg i vakuum i punktet $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} = (x_0, 0, 0)$ på x-aksen. Hva er det elektriske feltet i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer vektorene du har brukt i utregningen og retningen på feltet i punktet $\vec{r}$.

* * *

b) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er plassert på x-aksen. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

c) En uendelig lang linjeladning med uniform linjeladningstetthet ρ_l er i stedet plassert på en linje parallel med x-aksen gjennom $y = d$. Det er ingen andre ladninger til stede og systemet er i vakuum. Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$.

d) La oss nå anta at systemet består av to uendelig lange linjer som er parallelle med x-aksen. Den ene linjen går gjennom punktet $(0, 0, 0)$ og den andre går gjennom $(0, d, 0)$. Begge linjene har uniforme linjeladningstettheter ρ_l. Vis at det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i xy-planet er:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-d}\right)\hat{y}\ . \tag{1}$$

Vi ser nå på et system som består av en linje langs x-aksen og gjennom origo med en linjeladningstetthet ρ_l som ikke er uniform, men varierer med x:

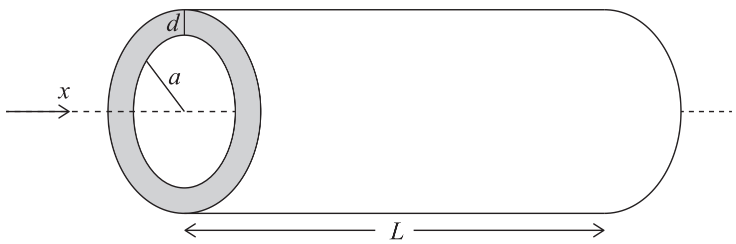
$$\rho_l(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_l(x) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} . \tag{2}$$

e) Finn et uttrykk på integral-form for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$ fra linjeladningstettheten $\rho_l(x)$ på x-aksen. (Du skal ikke løse dette integralet).

f) Anta at du kan tilnærme integralet med en sum over N elementer med bredde $dx_i = L/N$ i posisjonene $x_i = (i + 1/2)dx_i$ for $i = 0, 1, \ldots, N - 1$. Hvert element bidrar med en punktladning $dq_i = \rho_l(x_i)dx_i$. Skriv et kort program som finner en tilnærmet verdi for det elektriske feltet $\vec{E}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r}$ ved å summere feltene fra punktladningene dq_i.

Oppgave 2: Sylindrisk komponent

Vi skal i denne oppgaven studere oppførselen til en sylinderformet nervecelle som illustrert i figuren. Vi modellerer en del av cellen som et sylinderskall. Sylinderskallet har lengde L. Den indre radiusen er a. Tykkelsen på sylinderskallet er d. Du kan anta at L er mye større enn a og d slik at systemet har sylindersymmetri.



Først ønsker vi å finne **kapasitansen** til sylinderskallet. Vi antar da at området innenfor og utenfor sylinderskallet er ideelle ledere. Sylinderskallet er et dielektrisk materiale med dielektrisk konstant ϵ.

a) Anta at det er en ladning Q på den indre overflaten av sylinderskallet og en ladning $-Q$ på den ytre overflaten av sylinderskallet. Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

b) Finn skalarpotensialet $V(r)$ som funksjon av avstanden r til sylinderskallets akse.

c) Vis at kapasitansen til sylindernskallet er

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)} \ . \tag{3}$$

Så ønsker vi å finne **resistansen** til sylinderskallet. Sylinderskallet er en leder med konduktivitet σ.

d) Finn strømtettheten $\vec{J}$ i sylinderskallet når det går en strøm I gjennom sylinderskallet fra den indre til den ytre overflaten.

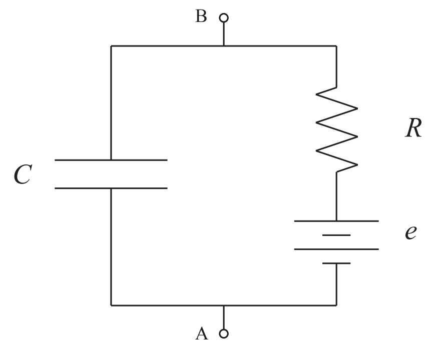
e) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ i sylinderskallet i dette tilfellet.

f) Finn skalarpotensialet $V(r)$ i sylinderskallet og bruk dette til å vise at resistansen til sylinderskallet er

$$R = \frac{\ln\left(1 + \frac{d}{a}\right)}{2\pi\sigma L} \ . \tag{4}$$

Oppgave 3: Krets-modell for en celle

Vi skal studere en krets som en modell for en cellemembran. Kretsen består av en kondensator C, en motstand R og et batteri med emf e koblet sammen som illustrert i figuren. Vi måler potensialforskjellen mellom punkt A og B, V_{AB}.



a) Ved tiden $t = 0$ er kondensatoren uten ladning. Hva er strømmen I_R gjennom motstanden ved $t = 0$?

b) Hva er ladningen, Q_∞, på kondensatoren når $t \to \infty$?

c) Vis at likningen som beskriver ladningen, Q, på kondensatoren kan skrives som

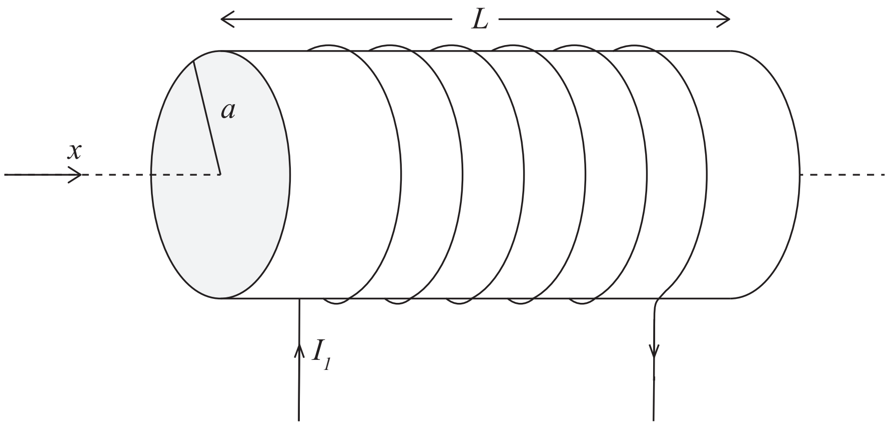
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(Q_\infty - Q\right) \ , \tag{5}$$

hvor $\tau = RC$.

d) Skriv et program som finner spenningen $V_{AB}(t)$ som funksjon av tiden for dette systemet.

Oppgave 4: Dobbeltspole

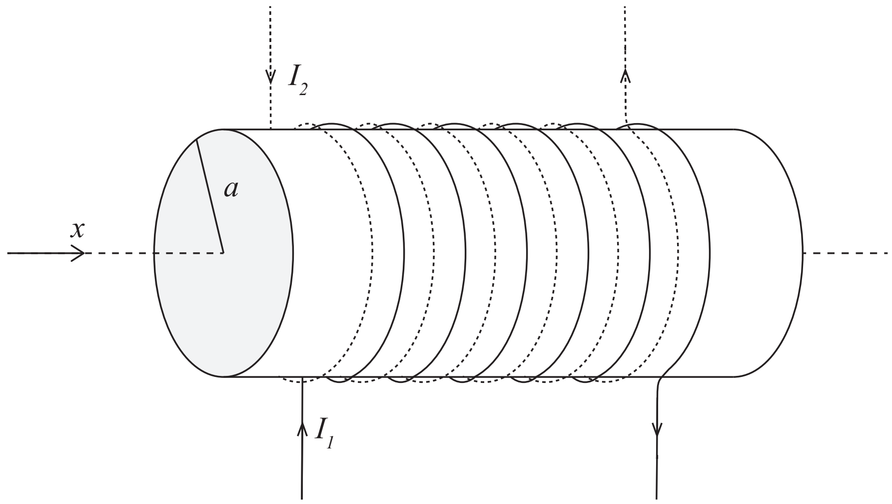
Vi skal i denne oppgaven studere en solenoide som vist i figuren. Solenoiden består en ledning som er viklet N ganger om en sylinder med radius a og lengde L hvor $L \gg a$. Inne i sylinderen er det et magnetisk materiale med permeabilitet μ.



a) Finn $\vec{H}$-feltet, $\vec{B}$-feltet og magnetiseringen $\vec{M}$ inne i solenoiden når det går en strøm I gjennom ledningen. Du kan anta at $\vec{H}$-feltet er null utenfor solenoiden og at $\vec{H}$-feltet kun har en komponent i x-retningen inne i spolen.

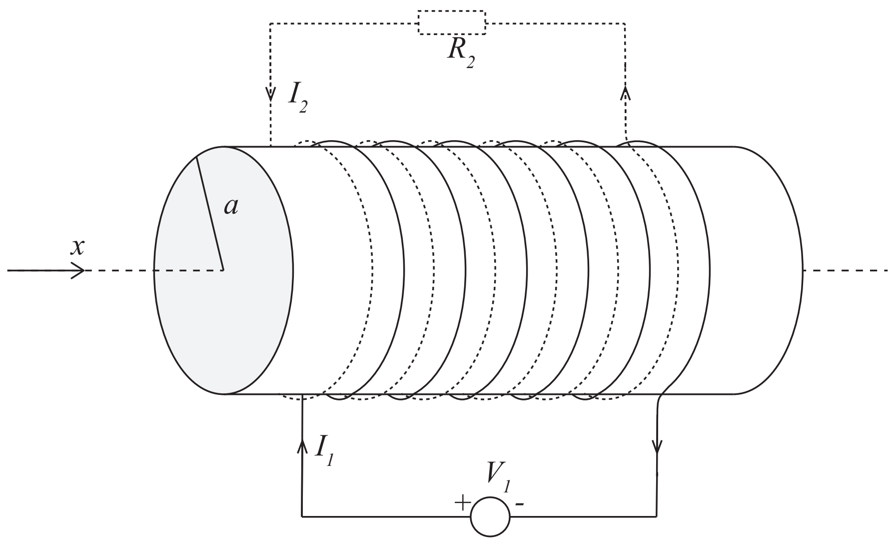
b) Finn selvinduktansen L_{11} for spolen.

Vi vikler nå en ny ledning rundt den samme spolen med M antall viklinger som illustrert med stiplet linje i figuren under. Merk at indikert positiv strømretning rundt spolen for strøm I_2 er motsatt av positiv strømretning for I_1. Du kan anta at a og L er de samme, at ledningene er isolerte slik at de ikke er i kontakt og at begge ledningene dekker det samme området på sylinderen.



c) Hva er den gjensidige induktansen L_{12} mellom disse to spolene?

d) Vi kobler spole 1 til en tidsvarierende spenningskilde med emf $V_1(t)$ og spole 2 til en motstand R_2. Finn et sett med likninger for strømmene I_1 og I_2 i spole 1 og spole 2. (Du skal ikke løse disse likningene).



Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\mathrm{ref}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Kretser:

$$\sum_i V_i = 0, \qquad \sum_i I_i = 0, \qquad V = RI, \qquad I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad P = VI,$$

$$V = \mathrm{Re}\{\hat{V}\exp(i\omega t)\}, \qquad \hat{Z} = R, \qquad \hat{Z} = \frac{1}{i\omega C}, \qquad \hat{Z} = i\omega L.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i }S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N$\cdot$m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \text{ (x vilkårlig akse)}\\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W\\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V\\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V\\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}\\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}\\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}\\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}\\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0\\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V\\
\nabla\times(\nabla V) &= 0\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned}
&\int_v \nabla V \mathrm{d}v = \oint_S V\mathrm{d}\mathbf{S}\\
&\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)}\\
&\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A}\\
&\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\\
&+ \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}\\
&+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}
\end{aligned}$$