UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120 og Fys1120L
Eksamensdag:	Onsdag 11. desember 2019
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	13 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Sensorveiledning. Merk at vi krever fysiske resonnementer og referanser til hvilke lover man tar utgangspunkt i for å få full uttelling i en oppgave. Hvis man ser på en krets skal man angi at man bruker Kirchoffs lov og ikke bare skrive den opp. Det er slik man dokumenterer hvordan man har løst en oppgave og hvordan man har tenkt når man løser en oppgave.
Hver deloppgave gis en score fra 0 til 5.

Oppgave 1: Konsentriske skall

To like ladninger q befinner seg i vakuum i punktene $\mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{r}_2 = -a\hat{\mathbf{x}}$ hvor $\hat{\mathbf{x}}$ er enhetsvektoren i x-retningen og a er en lengde.

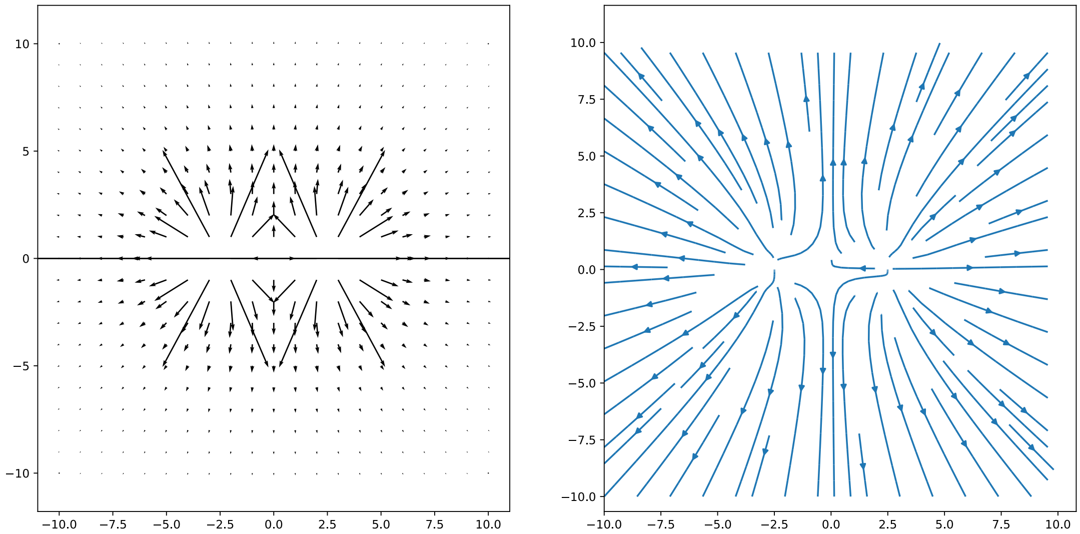
a) Hva er det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, i $\mathbf{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer systemet og $\mathbf{E}$-feltet.

Solution. Vi anvender Coloumbs lov. Det elektriske feltet er

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \ , \tag{1}$$

hvor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i = (x \pm a, y, z)$ og $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ slik at feltet er:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a, y, z)}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{(x+a, y, z)}{((x+a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) \ . \tag{2}$$



Sensorveiledning. *Læringsmål: Coloumbs lov, vektorer, retning på felt.* Trekk 2 for manglende figur. Trekk 1 hvis figuren viser systemet, men ikke feltet. Trekk 2 hvis resultatet ikke er en vektor. Gi kun 1 hvis $\mathbf{R}$ ikke er definert. Trekk 2 hvis man bruker $\mathbf{R} = (\pm a, 0, 0)$. Det er fullgodt svar å oppgi korrekte vektorer for $\mathbf{R}_1$ og $\mathbf{R}_2$, men ikke skrive ut absolutt-verdien i nevneren. Trekk 1 hvis figuren viser et felt som øker i styrke vekk fra origo (f.eks. ved at pilene øker i lengde vekk fra origo).

b) Hva er det elektriske potensialet, V, i punktet z på z-aksen?

Solution. Vi kan finne det elektriske potensialet ved å integrere feltet fra oppgave a, eller ved å finne feltet direkte. Vi finner feltet direkte ved å sette inn i:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x+a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) . \tag{3}$$

På z-aksen er $x = y = 0$ slik at potensialet blir:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} . \tag{4}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Potensiale.*
Alternativ fremgangsmåte 1: Integrasjon av uttrykket over: Det gis 1 poeng for å skrive at potensialet er gitt som integralet over feltet. Hvis man setter opp riktig integral med f.eks. R^2 i nevneren, men ikke klarer å sette inn riktig for R gis det 2 poeng. Hvis man først utleder det generelle uttrykket for potensialet fra en punktladning vurderes oppgaven som metode 2. Hvis man setter opp riktig integral, men ikke klarer å løse det gis det 4. Studenten kan selv velge referansepunkt for potensialet.
Alternativ fremgangsmåte 2: Bruk av uttrykk for potensial fra punktladning. Det gis 2 poeng for å sette opp uttrykket for potensialet fra punktladning med R i nevneren selv om man ikke klarer å regne ut R.

c) Finn det elektriske feltet og det elektriske potensialet i origo. Kommenter verdien for potensialet i lys av verdien for feltet.

Solution. Vi ser at det elektriske feltet er null, mens det elektriske potensialet er $q/(2\pi\epsilon_0 a)$. Det er rimelig at det elektriske feltet er null, da orige er midt mellom to like store ladninger. Potensialet er ikke null fordi det ikke finnes noen bane en ladning kan bevege seg langs hvor det ikke gjøres noe arbeid. Fordi feltet kun er null i origo, men ikke utenfor origo, vil ikke potensialet være null.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Potensiale og elektrisk felt, ferdighet i å forklare en observasjon*
Både å sette inn i uttrykket for feltet og et enkelt argument om at kreftene vil være like store fra begge ladningene er fullgode svar på å finne feltet.
Det gis 2 poeng for feltet, 2 poeng for potensialet og 1 poeng for en kommentar om at potensialet kan være forskjellig for null selv om feltet er null. Det er tilstrekkelig å f.eks. kommentere at $\mathbf{E}$ er gradienten til V og at potensialet derfor kan være forskjellig fra null selv om feltet er null, eller å kommentere at origo er et sadel eller ekstremalpunkt for potensialet.
Hvis man kommenterer at $\mathbf{E}$ er null pga symmetrien er dette fullgodt for feltet. Hvis man argumenterer for at $V \neq 0$ selv om man ikke finner verdien gir dette 1 poeng for V/forklaringen.

Vi plasserer i stedet en romladningstetthet $\rho_1(\mathbf{r})$ i vakuum. Tettheten er uniform for $r \leq a$ og null for $r > a$, hvor $r = |\mathbf{r}|$ og a er en lengde. Den totale ladningen er q.

d) Vis at romladningstettheten er $\rho_1(r) = 3q/(4\pi a^3)$ for $r \leq a$ og null for $r > a$.

Solution. Vi finner den totale ladningen ved å integrere romladningstettheten over hele rommet:

$$q = \iiint \rho_1 dv = \rho_1 \iiint dv = \rho_1 \frac{4}{3}\pi a^3 \ , \tag{5}$$

og dermed er

$$\rho_1 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \ , \tag{6}$$

som var det vi skulle vise.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Romladning og romintegral* Det gis full uttelling for å bruke volumet til en kule uten å skrive opp integralet. Det trekkes ikke selv om det ikke kommenteres av $\rho_1(r) = 0$ for $r > a$ da dette er oppgitt i oppgaven.

e) Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

Solution. Vi ser at ladningsfordelingen er kulesymmetrisk. Derfor forventer vi også at det elektriske feltet er kulesymmetrisk, $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$, hvor r er avstanden til origo. Vi anvender Gauss' lov på en kuleflate med radius r med sentrum i origo. Gauss lov gir oss da at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \tag{7}$$

Her er $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S}$ konstant på hele kuleflaten, slik at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r \iint dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \ . \tag{8}$$

Her er $q(r)$ ladningen som er innenfor en radius r. Hvis $r \geq a$ er $q(r) = q$. Ellers er $q(r) = \rho_1(4/3)\pi r^3$. Vi setter inn $\rho_1 = 3q/(4\pi a^3)$ og finner at $q(r) = q(r/a)^3$ for $r < a$. Vi setter dette inn i Gauss' lov. For $r \leq a$ finner vi at:

$$E_r(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{a^3 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3} \ . \tag{9}$$

Mens for $r > a$ vil ladningen innenfor r være q, slik at feltet da blir

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \ . \tag{10}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Gauss' lov og symmetri av felt* Hvis symmetrien ikke kommenteres eller skrives eksplisitt inn i valget av $\mathbf{E}$ trekkes det 1. Det er fullgodt å skrive at pga. (kule)symmetri er $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$. Det er fullgodt svar å bruke Coulombs lov for feltet fra en kuleformet ladning, men da må det kommenteres at det kun er ladningen innenfor som bidrar. *Generelt:* Det trekkes etter skjønn hvis uttrykket for romladningstettheten brukes feil eller det gjøres mindre regnemessige feil i uttrykket. Det gis kun 2 poeng om kun resultatet for $r > a$ er regnet ut. Det gis kun 1 poeng hvis man tenker seg at det er en ladning q i origo også for $r < a$ (altså at man ikke tar hensyn til at ladningen innenfor Gaussflaten varierer med r).

Vi plasserer i tillegg en romladningstetthet $\rho_2(\mathbf{r})$ oppå ρ_1 i det samme systemet. Tettheten ρ_2 er uniform for $r \leq b$ og null for $r > b$, hvor $b > a$ er en lengde. Den totale ladningen for ladningstettheten ρ_2 er $-q$.

f) Finn det elektriske feltet overalt i rommet fra systemet bestående av begge romladningstetthetene. Kommenter verdien til feltet for $r > b$.

Solution. Vi kan bruke superposisjonsprinsippet og resultatet fra oppgaven over til å finne det totale feltet. Vi må dele inn i tre områder, $r < a$, $a < r < b$ og $r > b$. Ved bruk av superposisjonsprinsipper finner vi et feltet er

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 b^3} & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 b^3} & a < r < b \\ 0 & b < r \end{cases} . \tag{11}$$

Merk spesielt at for $r > b$ vil netto ladning innenfor en radius r være null, og dermed er $E_r(r)$ også null. Merk at vi også har brukt at ladningen $-q$ er jevnt fordelt over området $r < b$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Gauss' lov, symmetri av felt, superposisjon*
Det trekkes etter vurdering for regnefeil. Det trekkes 1 hvis ikke svaret for $r > b$ er gitt eller dette ikke er null.

g) Skriv et kort program som regner ut og visualiserer det elektriske feltet i et område $-L < x < L$, $-L < z < L$ i xz-planet, hvor $L > b$.

Solution.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
L = 5
npoints = 26
a = 2.
b = 4.
x = np.linspace(-L,L,npoints)
y = np.linspace(-L,L,npoints)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Ex = X.copy()
Ey = X.copy()
for i, ix in enumerate(x):
    for j, iy in enumerate(y):
        r = np.sqrt(ix*ix+iy*iy)
        if (r>b):
            Ex[j,i] = 0.0
            Ey[j,i] = 0.0
        elif (r<a):
            E = r/a**3-r/b**3
            Ex[j,i] = E*ix/r
            Ey[j,i] = E*iy/r
        else:
            E = -r/b**3+1/r**2
```

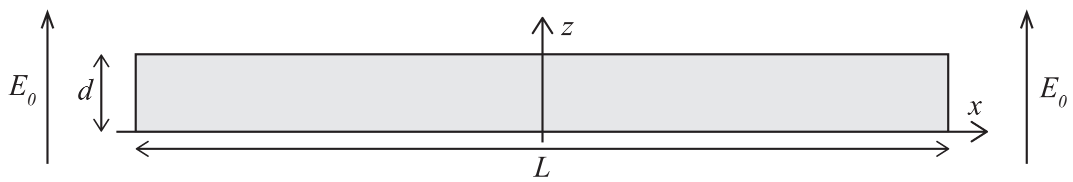
```
            Ex[j,i] = E*ix/r
            Ey[j,i] = E*iy/r
plt.figure(figsize=(16,16))
plt.quiver(X,Y,Ex,Ey)
```

Merk spesielt at vi må regne ut både størrelse og retning på feltet. Her finner vi retningen ved å bruke at $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Visualisering av elektrisk felt, beregningskompetanse*
Det trekkes ikke for manglende initialisering eller importering av pakker. Det trekkes 2 dersom det regnes med $\mathbf{E}$ som en skalar og ikke vektor. Det trekkes ikke for feil syntaks i bruk av `quiver` eller `meshgrid` så lenge det er klart hvordan studenten har tenkt.

Oppgave 2: Ideell leder

En ideell leder er formet som en tynn plate med lengde L og tykkelse d. Vi plasserer platen slik at L ligger langs x-aksen og d langs z-aksen som vist i figuren. Du kan anta at $L \gg d$ og du kan se bort fra kanteffekter. Lederen plasseres i et uniformt, ytre elektrisk felt $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{z}}$.



a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(x, y, z)$ inne i lederen. Begrunn svaret.

Solution. Feltet er null inne i lederen. Hvis feltet ikke var null, ville ladninger ha beveget seg og endret overflateladningstettheten til feltet inne i ledere ble null.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Ideelle ledere og ladningsfordeling*
Det gis 2 poeng for riktig svar (at E er null inne i ledere). Det gis 1 ekstra poeng for forklaringen *Det elektriske feltet er alltid null inne i en ideell leder* eller tilsvarende. For å få 5 poeng må man også gi en form for forklaring for hvorfor det elektriske feltet er null inne i en ideell leder.

b) Hva er overflateladningstettheten på oversiden ($z = d$) og undersiden ($z = 0$) av lederen?

Solution. (Merk at det her kan være fristende å bruke direkte at feltet på innsiden av lederen er null, og dermed sette opp en Gauss-flate gjennom den øvre overflaten. Men for å bruke dette til å bestemme overflateladningen må man vite at feltet rett på utsiden av lederen er $\mathbf{E}_0$. Det kreves i så fall et argument for at feltet fra de to overflatene kansellerer på oversiden og undersiden av overflaten for at dette skal være en fullgod løsning.)

Vi vet at ladningen fra lederen vil plassere seg på overflaten på et slikt vis at det elektriske feltet inne i lederen blir null. Siden lederen er lang vil vi andta at ladningstettheten er tilnærmet uniform. La oss anta at ladningstettheten da er σ på oversiden. Siden lederen er nøytral, må ladningstettheten da være $-\sigma$ på undersiden.

Det elektriske feltet fra en flate med ladningstetthet σ kan vi finne ved hjelp av Gauss' lov. Siden overflaten er stor antar vi at det elektriske feltet kun har en komponent i z-retningen og at feltet ikke varierer langsmed overflaten slik at $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi kan da anvende Gauss' lov på en sylinder med areal S. Fluksen ut av sideflatene av sylinderen er null siden feltet kun er rettet normalt på flaten. Vi antar at feltet er symmetrisk om flaten slik at $E_z(z) = -E_z(-z)$. Gauss' lov gir at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_z S + E_z S = 2E_z S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \sigma S \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \ . \tag{12}$$

Retningen på feltet vil være vekk fra flaten.

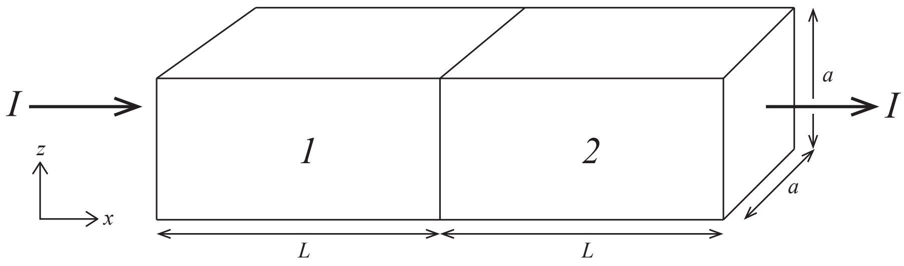
Hva blir da feltet inne i lederen? Det blir det ytre feltet pluss summen av feltene fra den øvre og den nedre overflaten. Bidraget fra den øvre flaten vil være nedover: $E_z = -\sigma/(2\epsilon_0)$. Bidraget fra den nedre flaten vil være $E_z = (-\sigma)/(2\epsilon_0)$. Det totale feltet innen i lederen blir da:

$$E_{z,\text{tot}} = E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma = E_0\epsilon_0 \ . \tag{13}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Gauss' lov, overflateladning, ideelle ledere, forståelse for ladningsfordeling i ideelle ledere*
Hvis man bruker Gauss' lov på f.eks. den øvre overflaten og bruker at feltet er null inne i overflaten, kan man finne overflateladningstettheten hvis man vet at feltet er $\mathbf{E_0}$ utenfor lederen. Tilsvarende kan man bruke grensebetingelsen for **D**-feltet, men dette krever også at man vet at feltet er $\mathbf{E}_0$ utenfor lederen. Uten et argument for at feltene fra de to overflateladningene kansellerer ovenfor og nedenfor lederen, vet man ikke at feltet er $\mathbf{E}_0$ utenfor lederen og derfor gir slike fremgangsmåter 4 poeng.
Det trekkes 1 poeng for manglende kommentar om sideflatene i Gauss lov anvendt på en av overflatene, med mindre det er kommentert at feltet kun er rettet normalt på overflaten.

Oppgave 3: Sammensatt leder

To ikke-ideelle ledere med tverrsnitt $a \times a$ og lengder L og L er koblet sammen som vist i figuren. Leder 1 har konduktivitet σ_1, og leder 2 har konduktivitet σ_2. Det går en strøm I gjennom begge lederne som vist i figuren.



a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}_1(x)$ og $\mathbf{E}_2(x)$ i hver av lederne.

Solution. Vi antar at strømtettheten er uniform i hver av lederne og lik $\mathbf{J} = J_x\hat{\mathbf{x}} = (I/a^2)\hat{\mathbf{x}}$. Vi finner det elektriske feltet ved Ohms lov, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, slik at $\mathbf{E}_1 = I/(a^2\sigma_1)\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{E}_2 = I/(a^2\sigma_2)\hat{\mathbf{x}}$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Strøm og strømmtetthet, Ohms lov*
Siden det er oppgitt at materialene har en bestemt konduktivitet er det greit å skrive direkte at $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, selv om det foretrekkes at man nevner at man bruker Ohms lov. Det trekkes 1 hvis man ikke oppgir det elektriske feltet som en vektor (eller angir retningen på feltet tydelig) fordi det spørres etter en vektorstørrelse.

b) Finn potensialforskjellene V_1 og V_2 over lederne.

Solution. Vi legger x-aksen slik at lederen ligger langs x-aksen og begynner ved $x = 0$.Potensialforskjellen mellom $x = 0$ og $x = L$ er da

$$\Delta V_1 = V(0) - V(L) = \int_0^L E_x dx = E_1 L = \frac{I}{a^2\sigma_1} L \ . \tag{14}$$

og tilsvarende for potensialforskjellen mellom $x = L$ og $x = 2L$:

$$\Delta V_2 = V(L) - V(2L) = \int_L^{2L} E_x dx = E_2(2L - L) = \frac{I}{a^2\sigma_2} L \ . \tag{15}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Potensialforskjell og elektrisk felt i en leder.*
Det trekkes ikke hvis man har feil uttrykk for feltet fra oppgaven over, men setter dette korrekt inn. Det trekkes 1 hvis man regner ut V_2 som spenningen over begge komponentene. Det trekkes 2 hvis man regner ut $V_1(x)$ og $V_2(x)$, men man ikke skriver dette om til spenningsfallet over komponentene. Det trekkes 1 dersom fortegnet er feil (negativt spenningsfall), men kun dersom det ikke kommenteres og rettes opp i denne eller neste oppgave.

c) Finn motstandene R_1 og R_2 til hver av lederne og motstanden R til hele systemet. Sammenlikn med hva du forventer for to motstander og kommenter.

Solution. Vi finner motstanden R_1 ved $R_1 = \Delta V_1/I = L/(a^2\sigma_1)$ og tilsvarende $R_2 = \Delta V_2/I = L/(a^2\sigma_2)$. Motstanden til hele systemet er:

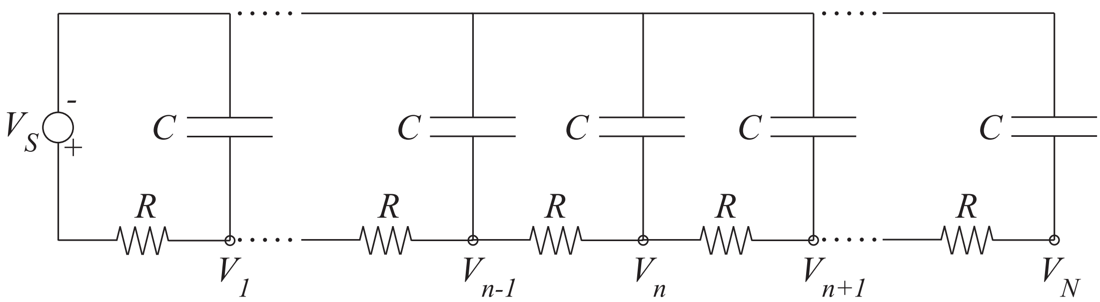
$$R = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{I} = \frac{L}{a^2\sigma_1} + \frac{L}{a^2\sigma_2} = R_1 + R_2\ . \tag{16}$$

Dette er det samme som vi forventer av en seriekobling av to mostander R_1 og R_2.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Utregning av resistans for en leder. Seriekobling av motstander. Forståelse for sammensatte motstander.*
Det gis 3 hvis man kun finner R_1 og R_2. Det gis 2 hvis man kun bruker loven for seriekobling av motstander uten å finne R_1 og R_2 fra potensialene. Det trekkes 2 hvis man har følgefeil fra tidligere oppgave som gjør at resultatet ikke stemmer med summen av motstandene, hvis man ikke oppdager denne feilen.

Oppgave 4: Modell for cellemembran

Figuren viser en enkel modell for en celle-membran som består av N elementer som er koblet sammen. Systemet er koblet til en spenningkilde $V_s(t)$ på venstre side som vist i figuren.



a) Hvis vi kobler på en konstant spenning $V_s(t) = V_s$, hva blir spenningene V_n etter uendelig lang tid?

Solution. Etter uendelig lang tid vil det ikke lenger gå noen strøm i kretsen og det vil derfor ikke være noen spenningsfall over motstandene. Alle spenningene V_n vil derfor være de samme, $V_n = V_s$.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Spenningsfall over kapasitans, forståelse for stasjonæritet.*
Det gis maksimalt 2 dersom man tror at det fremdeles går en strøm i systemet etter lang tid. Det gis 3 dersom man argumenterer greit, men man får $V_n = V_s/N$.

b) Vis at spenningen V_n, $n = 2, \ldots, N-1$, kan uttrykkes ved likningen:

$$C\frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{R} \tag{17}$$

Solution. Vi anvender Kirchoffs strømlov på knutepunktet V_n som illustrert i figuren under. Da er $I_{n+1} = I_n + I_{n-1}$. Vi finner I_{n+1} fra spenningfallet over motstanden R: $I_{n+1} = (V_{n+1} - V_n)/R$, og vi finner I_{n-1} fra spenningsfallet over motstanden R: $I_{n-1} = (V_n - V_{n-1})/R$. Strømmen $I_n = dQ_n/dt$, hvor $Q_n = CV_n$, slik at $I_n = CdV_n/dt$. Vi får da at:

$$I_n + I_{n-1} = C\frac{dV_n}{dt} + \frac{V_n - V_{n-1}}{R} = \frac{V_{n+1} - V_n}{R} \;, \tag{18}$$

som vi kan skrive om som

$$C\frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{R} \;, \tag{19}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kretser som modeller for fysiske systemer. Kirchoffs spennings- og strømlov. Sammensatte kretser.*
Det trekkes 1 om man ikke nevner bruk av bevaring av ladning, strøm eller Kirchoffs strømlov når denne brukes.

c) Hva blir likningen for spenning V_1?

Solution. For spenning V_1 vil $V_{1-1} = V_0$ være gitt som $V_s(t)$ slik at likningen for V_1 blir

$$C\frac{dV_1}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_1 + V_s(t)}{R} \;. \tag{20}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Tolkning av pålagt spenning i en krets. Sammensatte kretser.*
Det er her tilstrekkelig å påpeke at V_{n-1} her er den pålagte spenningen. Det kreves ikke ytterligere argumentasjon. Det gis maksimalt 2 om man her lager et nytt argument med Kirchoffs lover, men ser bort fra strømmen på høyre side av V_1.

d) Hva blir likningen for spenning V_N? Gi en tolkning av denne likningen når systemet er i en stasjonær tilstand.

Solution. For spenningen V_N vil det ikke være noen komponent til høyre for denne. Kirchoffs strømlov er derfor $I_N + I_{N-1} = 0$, og vi får at

$$I_N + I_{N-1} = C\frac{dV_N}{dt} + \frac{V_N - V_{N-1}}{R} = 0 \;, \tag{21}$$

som gir at:

$$C\frac{dV_N}{dt} = \frac{-V_N + V_{N-1}}{R} \;, \tag{22}$$

I stasjonær tilstand er venstre-siden null. Vi kan tolke høyresiden som en diskretisering av den romlig deriverte av spenningen, slik at i en stasjonær tilstand er $\partial V/\partial x = 0$ i høyre endepunkt.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Kirchoffs lover. Dypere forståelse for sammensatte kretser.*
Det er her nødvendig å gjøre argumentet med Kirchoffs lover på nytt, men med en strøm mindre i argumentet. Det trekkes 1 om man ikke kommenterer bruk av Kirchoffs spenning og/eller strømlover når disse brukes. Det gis kun 1 om man f.eks. kun fjerner V_{N+1} i den oppgitte likningen.
Det trekkes ikke om man ikke har tolket likningen som den romlig deriverte. Det er tilstrekkelig å kommentere at spenningen over de to siste komponentene er identiske i stasjonær tilstand.
(Denne deloppgaven gir muligheten til å sammenlikne med oppgave (a). Hvis man f.eks. får $CdV_N/dt = (V_{N-1} - 2V_N)/R$ bør man oppdage at dette ikke stemmer med (a) når tiden går mot uendelig. Hvis man oppdager dette gis det 2, hvis ikke gis det 1 for et slikt galt svar.)

e) Skriv et kort program som finner $V_n(t + dt)$ når du kjenner $V_n(t)$.

Solution.

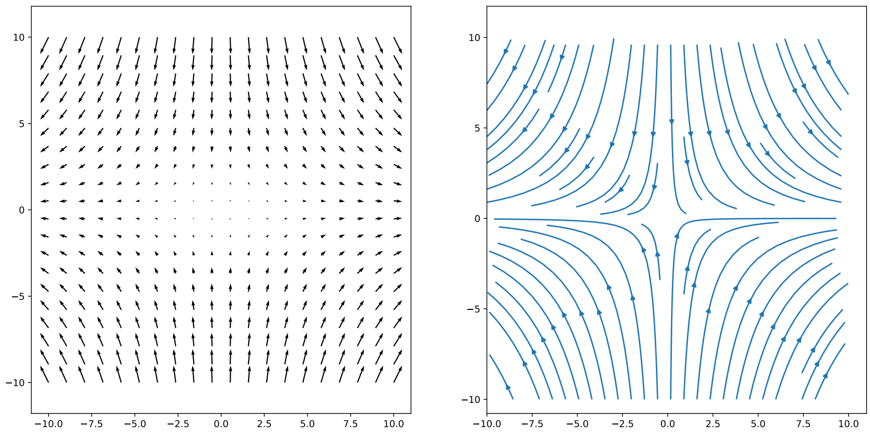
```
V[t+1,0] = Vs(t+dt)
for n in range(1,N-1):
    V[t+1,n] = V[t,n] + dt*(V[t,n+1] - 2*V[t,n] + V[t,n-1])/(R*C)
V[t+1,N-1] = V[t,N] + dt*(- V[t,N] + V[t,N-1])/(R*C)
```

Sensorveiledning. *Læringsmål: Modellerings- og beregningskompetanse. Forståelse for likningssystemet og grensebetingelser.*
Det trekkes 1 om man ikke har riktig grensebetingelse ved $n = 0$. Det trekkes 1 om man ikke har riktig grensebetingelse ved $n = N$. (Altså det gis 3 poeng om uttrykket for V_n regnes ut riktig for $n = 1, \ldots, N-1$.) Merk at det er tilstrekkelig å sette grensebetingelsen utenfor løkken. Merk også at det er greit å bruke notatsjonen `V[-1]` om V_N (dvs. for `V[N-1]`).

Oppgave 5: Magnetisk felle

Vi skal i denne oppgaven studere magnetfeltet $\mathbf{B} = \frac{B_0}{b}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} - 2z\hat{\mathbf{z}})$, hvor B_0 er en konstant og b er en lengde.

a) Skisser **B**-feltet i xz-planet.



Solution.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Magnetisk felt, vektorfelt, visualisering.*
Det gis 0 hvis feltet er tegnet som for en punktladning (med klar divergens) eller som fra en enkelt strømkrets.

b) Hva er divergensen, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, til magnetfeltet?

Solution. Vi finner divergensen som

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = 1 + 1 - 2 = 0 \,. \tag{23}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Magnetisk felt, Gauss' lov for magnetfelt, divergens til vektorfelt.*
Det gis kun 1 poeng for å si at divergensen til et magnetfelt alltid er null — det var dette man skulle vise i denne oppgaven.

Vi plasserer en kvadratisk krets med sidekant L i xy-planet med sentrum i origo og flatenormal i positiv z-retning.

c) Hva er den magnetiske fluksen, Φ, gjennom denne kretsen?

Solution. Den magnetiske fluksen er gitt som

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{24}$$

Men i xy-planet er $B_z = -2z = 0$. Derfor er fluksen i z-retningen null.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Fluks av magnetisk felt, overflatenormal til krets.* Det trekkes 1 hvis det ikke kommenteres eller gjøres klart at x- og y-komponentene ikke bidrar pga retningen på flatenormalen. Merk at det f.eks. er tilstrekkelig å skrive $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ inne i integralet for å vise at man tar hensyn til flatenormalet. Det gis 5 også om fluksen er oppgitt som en funksjon av z i denne oppgaven.

d) Kretsen beveges langs z-aksen med en hastighet v. Finn emf-en, e, som er indusert i kretsen som funksjon av z.

Solution. Vi bruker Faradays lov som sier at emf-en er gitt som

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \ . \tag{25}$$

Når kretsen er i en posisjon z vil det magnetiske feltet være $B_0/b(x, y, -2z)$. Fluksen er fremdeles kun avhengig av z-komponenten av $\mathbf{B}$-feltet, fordi overflatenormalen til kretsen peker i z-retningen. Fluksen er derfor

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint B_z dS = B_z \iint dS = (B_0/b)(-2z)S = (B_0/b)(-2z)L^2 \ . \tag{26}$$

Vi finner emf-en som

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0}{b}(-2z)L\right) = \frac{B_0}{b}2L\frac{dz}{dt} = \frac{B_0}{b}2Lv \ . \tag{27}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Fluks av magnetisk felt, Faradays lov, emf.* Det trekkes 1 hvis det ikke sies at x- og y-komponentene ikke bidrar pga retningen på flatenormalen. Hvis man regner ut fluksen i oppgave (c) og bruker det samme resultatet her er det fullgodt svar.

Oppgaver, løsninger og sensorveiledning for Fys1120 og Fys1120L, 2019