UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120 og Fys1120L
Eksamensdag:	Onsdag 11. desember 2019
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	10 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Oppgave 1: Konsentriske skall

To like ladninger q befinner seg i vakuum i punktene $\mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{r}_2 = -a\hat{\mathbf{x}}$ hvor $\hat{\mathbf{x}}$ er enhetsvektoren i x-retningen og a er en lengde.

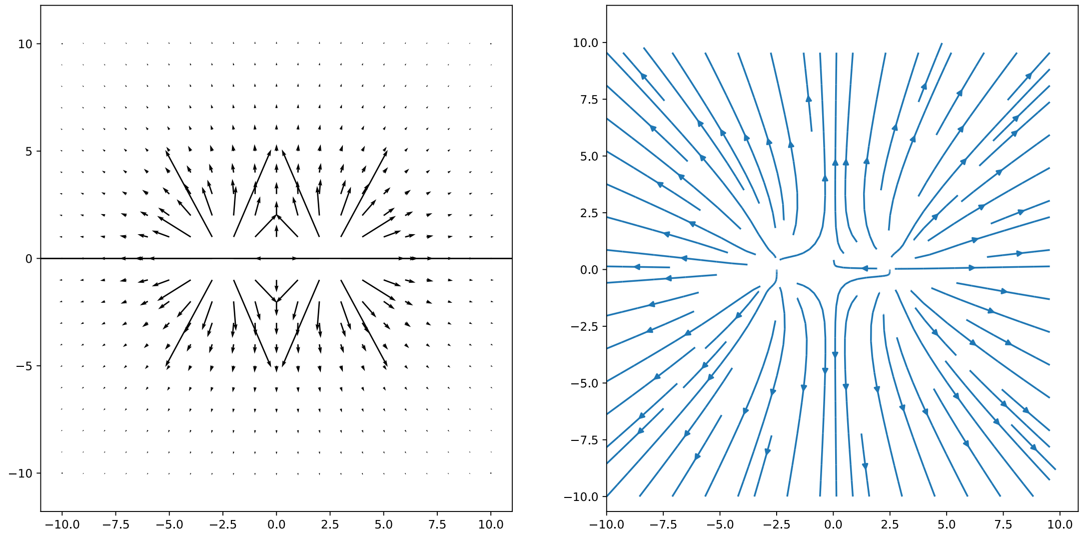
a) Hva er det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, i $\mathbf{r} = (x, y, z)$? Lag en tegning som illustrerer systemet og $\mathbf{E}$-feltet.

Solution. Vi anvender Coloumbs lov. Det elektriske feltet er

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \ , \tag{1}$$

hvor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i = (x \pm a, y, z)$ og $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ slik at feltet er:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a, y, z)}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{(x+a, y, z)}{((x+a)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) \ . \tag{2}$$



b) Hva er det elektriske potensialet, V, i punktet z på z-aksen?

Solution. Vi kan finne det elektriske potensialet ved å integrere feltet fra oppgave a, eller ved å finne feltet direkte. Vi finner feltet direkte ved å sette inn i:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{((x-a)^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x+a)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) . \tag{3}$$

På z-aksen er $x = y = 0$ slik at potensialet blir:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right) = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+z^2)^{1/2}} . \tag{4}$$

c) Finn det elektriske feltet og det elektriske potensialet i origo. Kommenter verdien for potensialet i lys av verdien for feltet.

Solution. Vi ser at det elektriske feltet er null, mens det elektriske potensialet er $q/(4\pi\epsilon_0 a)$. Det er rimelig at det elektriske feltet er null, da orige er midt mellom to like store ladninger. Potensialet er ikke null fordi det ikke finnes noen bane en ladning kan bevege seg langs hvor det ikke gjøres noe arbeid. Fordi feltet kun er null i origo, men ikke utenfor origo, vil ikke potensialet være null.

Vi plasserer i stedet en romladningstetthet $\rho_1(\mathbf{r})$ i vakuum. Tettheten er uniform for $r \leq a$ og null for $r > a$, hvor $r = |\mathbf{r}|$ og a er en lengde. Den totale ladningen er q.

d) Vis at romladningstettheten er $\rho_1(r) = 3q/(4\pi a^3)$ for $r \leq a$ og null for $r > a$.

Solution. Vi finner den totale ladningen ved å integrere romladningstettheten over hele rommet:

$$q = \iiint \rho_1 dv = \rho_1 \iiint dv = \rho_1 \frac{4}{3}\pi a^3 \,, \tag{5}$$

og dermed er

$$\rho_1 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \,, \tag{6}$$

som var det vi skulle vise.

e) Finn det elektriske feltet alle steder i rommet.

Solution. Vi ser at ladningsfordelingen er kulesymmetrisk. Derfor forventer vi også at det elektriske feltet er kulesymmetrisk, $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$, hvor r er avstanden til origo. Vi anvender Gauss' lov på en kuleflate med radius r med sentrum i origo. Gauss lov gir oss da at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \tag{7}$$

Her er $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S}$ konstant på hele kuleflaten, slik at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r \iint dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \,. \tag{8}$$

Her er $q(r)$ ladningen som er innenfor en radius r. Hvis $r \geq a$ er $q(r) = q$. Ellers er $q(r) = \rho_1(4/3)\pi r^3$. Vi setter inn $\rho_1 = 3q/(4\pi a^3)$ og finner at $q(r) = q(r/a)^3$ for $r < a$. Vi setter dette inn i Gauss' lov. For $r \leq a$ finner vi at:

$$E_r(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{a^3 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3} \,. \tag{9}$$

Mens for $r > a$ vil ladningen innenfor r være q, slik at feltet da blir

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \,. \tag{10}$$

Vi plasserer i tillegg en romladningstetthet $\rho_2(\mathbf{r})$ oppå ρ_1 i det samme systemet. Tettheten ρ_2 er uniform for $r \leq b$ og null for $r > b$, hvor $b > a$ er en lengde. Den totale ladningen for ladningstettheten ρ_2 er $-q$.

f) Finn det elektriske feltet overalt i rommet fra systemet bestående av begge romladningstetthetene. Kommenter verdien til feltet for $r > b$.

Solution. Vi kan bruke superposisjonsprinsippet og resultatet fra oppgaven over til å finne det totale feltet. Vi må dele inn i tre områder, $r < a$, $a < r < b$ og $r > b$. Ved bruk av superposisjonsprinsipper finner vi et feltet er

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 b^3} & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 b^3} & a < r < b \\ 0 & b < r \end{cases} . \tag{11}$$

Merk spesielt at for $r > b$ vil netto ladning innenfor en radius r være null, og dermed er $E_r(r)$ også null. Merk at vi også har brukt at ladningen $-q$ er jevnt fordelt over området $r < b$.

g) Skriv et kort program som regner ut og visualiserer det elektriske feltet i et område $-L < x < L$, $-L < z < L$ i xz-planet, hvor $L > b$.

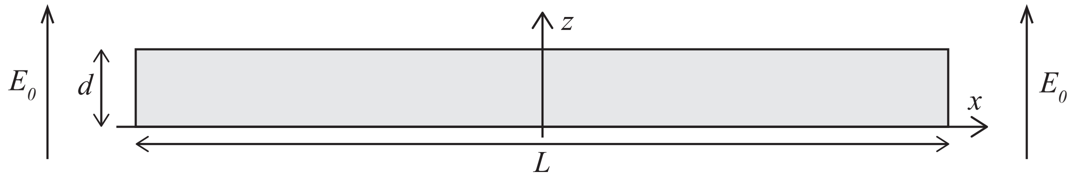
Solution.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
L = 5
npoints = 26
a = 2.
b = 4.
x = np.linspace(-L,L,npoints)
y = np.linspace(-L,L,npoints)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Ex = X.copy()
Ey = X.copy()
for i, ix in enumerate(x):
    for j, iy in enumerate(y):
        r = np.sqrt(ix*ix+iy*iy)
        if (r>b):
            Ex[j,i] = 0.0
            Ey[j,i] = 0.0
        elif (r<a):
            E = r/a**3-r/b**3
            Ex[j,i] = E*ix/r
            Ey[j,i] = E*iy/r
        else:
            E = -r/b**3+1/r**2
            Ex[j,i] = E*ix/r
            Ey[j,i] = E*iy/r
plt.figure(figsize=(16,16))
plt.quiver(X,Y,Ex,Ey)
```

Merk spesielt at vi må regne ut både størrelse og retning på feltet. Her finner vi retningen ved å bruke at $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$.

Oppgave 2: Ideell leder

En ideell leder er formet som en tynn plate med lengde L og tykkelse d. Vi plasserer platen slik at L ligger langs x-aksen og d langs z-aksen som vist i figuren. Du kan anta at $L \gg d$ og du kan se bort fra kanteffekter. Lederen plasseres i et uniformt, ytre elektrisk felt $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{z}}$.



a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(x, y, z)$ inne i lederen. Begrunn svaret.

Solution. Feltet er null inne i lederen. Hvis feltet ikke var null, ville ladninger ha beveget seg og endret overflateladningstettheten til feltet inne i ledere ble null.

b) Hva er overflateladningstettheten på oversiden ($z = d$) og undersiden ($z = 0$) av lederen?

Solution. (Merk at det her kan være fristende å bruke direkte at feltet på innsiden av lederen er null, og dermed sette opp en Gauss-flate gjennom den øvre overflaten. Men for å bruke dette til å bestemme overflateladningen må man vite at feltet rett på utsiden av lederen er $\mathbf{E}_0$. Men det kreves et argument for dette.)

Vi vet at ladningen fra lederen vil plassere seg på overflaten på et slikt vis at det elektriske feltet inne i lederen blir null. Siden lederen er lang vil vi andta at ladningstettheten er tilnærmet uniform. La oss anta at ladningstettheten da er σ på oversiden. Siden lederen er nøytral, må ladningstettheten da være $-\sigma$ på undersiden.

Det elektriske feltet fra en flate med ladningstetthet σ kan vi finne ved hjelp av Gauss' lov. Siden overflaten er stor antar vi at det elektriske feltet kun har en komponent i z-retningen og at feltet ikke varierer langsmed overflaten slik at $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi kan da anvende Gauss' lov på en sylinder med areal S. Fluksen ut av sideflatene av sylinderen er null siden feltet kun er rettet normalt på flaten. Vi antar at feltet er symmetrisk om flaten slik at $E_z(z) = -E_z(-z)$. Gauss' lov gir at

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_z S + E_z S = 2E_z S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \sigma S \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \ . \tag{12}$$

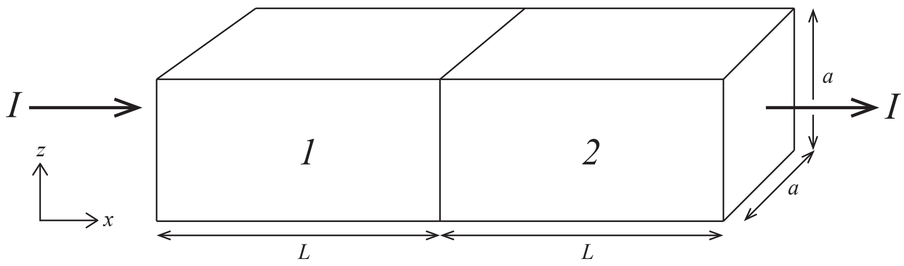
Retningen på feltet vil være vekk fra flaten.

Hva blir da feltet inne i lederen? Det blir det ytre feltet pluss summen av feltene fra den øvre og den nedre overflaten. Bidraget fra den øvre flaten vil være nedover: $E_z = -\sigma/(2\epsilon_0)$. Bidraget fra den nedre flaten vil være $E_z = (-\sigma)/(2\epsilon_0)$. Det totale feltet innen i lederen blir da:

$$E_{z,\text{tot}} = E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma = E_0\epsilon_0 \ . \tag{13}$$

Oppgave 3: Sammensatt leder

To ikke-ideelle ledere med tverrsnitt $a \times a$ og lengder L og L er koblet sammen som vist i figuren. Leder 1 har konduktivitet σ_1, og leder 2 har konduktivitet σ_2. Det går en strøm I gjennom begge lederne som vist i figuren.



a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}_1(x)$ og $\mathbf{E}_2(x)$ i hver av lederne.

Solution. Vi antar at strømtettheten er uniform i hver av lederne og lik $\mathbf{J} = J_x\hat{\mathbf{x}} = (I/a^2)\hat{\mathbf{x}}$. Vi finner det elektriske feltet ved Ohms lov, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, slik at $\mathbf{E}_1 = I/(a^2\sigma_1)\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{E}_2 = I/(a^2\sigma_2)\hat{\mathbf{x}}$.

b) Finn potensialforskjellene V_1 og V_2 over lederne.

Solution. Vi legger x-aksen slik at lederen ligger langs x-aksen og begynner ved $x = 0$.Potensialforskjellen mellom $x = 0$ og $x = L$ er da

$$\Delta V_1 = V(0) - V(L) = \int_0^L E_x dx = E_1 L = \frac{I}{a^2\sigma_1}L \ . \tag{14}$$

og tilsvarende for potensialforskjellen mellom $x = L$ og $x = 2L$:

$$\Delta V_2 = V(L) - V(2L) = \int_L^{2L} E_x dx = E_2(2L - L) = \frac{I}{a^2\sigma_2}L \ . \tag{15}$$

c) Finn motstandene R_1 og R_2 til hver av lederne og motstanden R til hele systemet. Sammenlikn med hva du forventer for to motstander og kommenter.

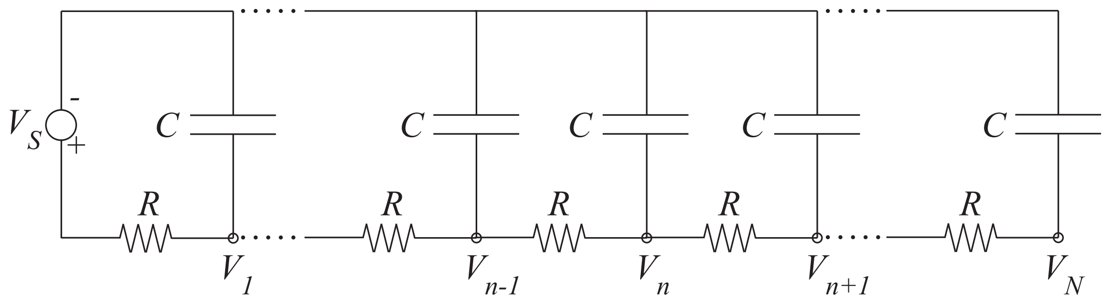
Solution. Vi finner motstanden R_1 ved $R_1 = \Delta V_1/I = L/(a^2\sigma_1)$ og tilsvarende $R_2 = \Delta V_2/I = L/(a^2\sigma_2)$. Motstanden til hele systemet er:

$$R = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{I} = \frac{L}{a^2\sigma_1} + \frac{L}{a^2\sigma_2} = R_1 + R_2 \ . \tag{16}$$

Dette er det samme som vi forventer av en seriekobling av to mostander R_1 og R_2.

Oppgave 4: Modell for cellemembran

Figuren viser en enkel modell for en celle-membran som består av N elementer som er koblet sammen. Systemet er koblet til en spenningkilde $V_s(t)$ på venstre side som vist i figuren.



a) Hvis vi kobler på en konstant spenning $V_s(t) = V_s$, hva blir spenningene V_n etter uendelig lang tid?

Solution. Etter uendelig lang tid vil det ikke lenger gå noen strøm i kretsen og det vil derfor ikke være noen spenningsfall over motstandene. Alle spenningene V_n vil derfor være de samme, $V_n = V_s$.

b) Vis at spenningen V_n, $n = 2, \dots, N-1$, kan uttrykkes ved likningen:

$$C\frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{R} \tag{17}$$

Solution. Vi anvender Kirchoffs strømlov på knutepunktet V_n som illustrert i figuren under. Da er $I_{n+1} = I_n + I_{n-1}$. Vi finner I_{n+1} fra spenningfallet over motstanden R: $I_{n+1} = (V_{n+1} - V_n)/R$, og vi finner I_{n-1} fra spenningsfallet over motstanden R: $I_{n-1} = (V_n - V_{n-1})/R$. Strømmen $I_n = dQ_n/dt$, hvor $Q_n = CV_n$, slik at $I_n = CdV_n/dt$. Vi får da at:

$$I_n + I_{n-1} = C\frac{dV_n}{dt} + \frac{V_n - V_{n-1}}{R} = \frac{V_{n+1} - V_n}{R} , \tag{18}$$

som vi kan skrive om som

$$C\frac{dV_n}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{R} , \tag{19}$$

c) Hva blir likningen for spenning V_1?

Solution. For spenning V_1 vil $V_{1-1} = V_0$ være gitt som $V_s(t)$ slik at likningen for V_1 blir

$$C\frac{dV_1}{dt} = \frac{V_{n+1} - 2V_1 + V_s(t)}{R} . \tag{20}$$

d) Hva blir likningen for spenning V_N? Gi en tolkning av denne likningen når systemet er i en stasjonær tilstand. I stasjonær tilstand er venstre-siden null. Vi kan tolke høyresiden som en diskretisering av den romlig deriverte av spenningen, slik at i en stasjonær tilstand er $\partial V/\partial x = 0$ i høyre endepunkt.

Solution. For spenningen V_N vil det ikke være noen komponent til høyre for denne. Kirchoffs strømlov er derfor $I_N + I_{N-1} = 0$, og vi får at

$$I_N + I_{N-1} = C\frac{dV_N}{dt} + \frac{V_N - V_{N-1}}{R} = 0\ , \tag{21}$$

som gir at:

$$C\frac{dV_N}{dt} = \frac{-V_N + V_{N-1}}{R}\ , \tag{22}$$

e) Skriv et kort program som finner $V_n(t + dt)$ når du kjenner $V_n(t)$.

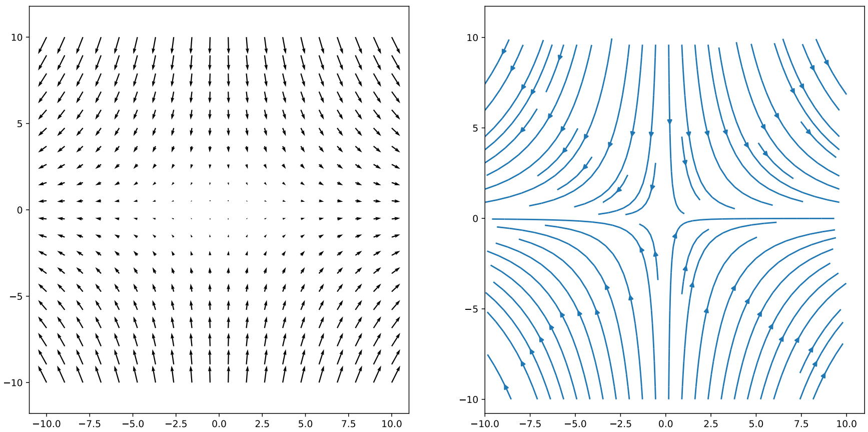
Solution.

```
V[t+1,0] = Vs(t+dt)
for n in range(1,N-1):
    V[t+1,n] = V[t,n] + dt*(V[t,n+1] - 2*V[t,n] + V[t,n-1])/(R*C)
V[t+1,N-1] = V[t,N] + dt*(- V[t,N] + V[t,N-1])/(R*C)
```

Oppgave 5: Magnetisk felle

Vi skal i denne oppgaven studere magnetfeltet $\mathbf{B} = \frac{B_0}{b}\left(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} - 2z\hat{\mathbf{z}}\right)$, hvor B_0 er en konstant og b er en lengde.

a) Skisser **B**-feltet i xz-planet.



Solution.

b) Hva er divergensen, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, til magnetfeltet?

Solution. Vi finner divergensen som

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}(-2z) = 1 + 1 - 2 = 0\,. \tag{23}$$

Vi plasserer en kvadratisk krets med sidekant L i xy-planet med sentrum i origo og flatenormal i positiv z-retning.

c) Hva er den magnetiske fluksen, Φ, gjennom denne kretsen?

Solution. Den magnetiske fluksen er gitt som

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{24}$$

Men i xy-planet er $B_z = -2z = 0$. Derfor er fluksen i z-retningen null.

d) Kretsen beveges langs z-aksen med en hastighet v. Finn emf-en, e, som er indusert i kretsen som funksjon av z.

Solution. Vi bruker Faradays lov som sier at emf-en er gitt som

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}\,. \tag{25}$$

Når kretsen er i en posisjon z vil det magnetiske feltet være $B_0/b(x, y, -2z)$. Fluksen er fremdeles kun avhengig av z-komponenten av **B**-feltet, fordi overflatenormalen til kretsen peker i z-retningen. Fluksen er derfor

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint B_z dS = B_z \iint dS = (B_0/b)(-2z)S = (B_0/b)(-2z)L^2 \; . \tag{26}$$

Vi finner emf-en som

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0}{b}(-2z)L\right) = \frac{B_0}{b}2L\frac{dz}{dt} = \frac{B_0}{b}2Lv \; . \tag{27}$$