Eksamen i Fys1120 H2024

Magnetisk felt i og rundt en kort solenoide

Vi skal i denne oppgaven studere det magnetiske feltet inne i og rundt en solenoide med strøm I og antall vindinger $M = 5$. Vi studerer først en enkelt sirkulær krets. Deretter setter vi sammen M kretser for å lage en modell for en solenoide.

Oppgave (a)

En sirkulær krets med radius a ligger i xy-planet med sentrum i origo. Det går en strøm I gjennom kretsen i positiv rotasjonsretning. Vis at det magnetiske feltet i origo blir

$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{k}$$

(Svar her)

(Løsning) Vi ser på et bidrag fra et strøm element $Id\vec{l}$ i posisjonen $\vec{r}'$. For dette elementet blir $\vec{R} = 0 - \vec{r}' = -\vec{r}'$. Bidraget til det magnetiske feltet i origo blir da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

Her ser vi at $d\vec{l}$ og $\vec{R}$ står normalt på hverandre og kryssproduktet vil peke i z-retningen. Det gir

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id|\vec{R}|}{R^3}\hat{z}$$

Vi ser at $R = a$ ikke endrer seg langs sirkelen. Vi summerer (integrerer) opp alle bidragene fra hele sirkelene som har en lengde $2\pi a$ og får

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi a^2}{a^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$$

Sensorveiledning: max 10 poeng - Det gis 6 poeng for å sette opp uttrykket for dB korrekt - Det trekkes 2 poeng dersom uttrykket for R-vektor er feil - Det trekkes 4 poeng dersom integralet ikke er regnet ut - Det trekkes 4 poeng dersom man ikke tar med lengden ($2\pi a$), men arealet (πa^2) - Det trekkes 3 poeng dersom man ikke har angitt retningen til feltet

Eksempel

Som hjelp til å løse oppgaven nedenfor kan du ta utgangspunkt i dette eksempelet.

Bidraget til det magnetiske feltet $d\vec{B}$ i punktet $\vec{r}$ fra et strømelement $Id\vec{l}$, i punktet $\vec{r}_s$ er gitt av funksjonen `dBfield(r,rs,Idl)`:

```
In [1]:
import numpy as np
def dBfield(r,rs,Idl):
    mu0 = 4*np.pi*1e-7
    R = r - rs
    return mu0/(4*np.pi)*np.cross(Idl,R)/np.linalg.norm(R)**3
```

Det magnetiske feltet fra et strømelement $Id\vec{l}$ i origo rettet langs z-aksen kan visualiseres i xy-planet ved

```
In [2]:
import matplotlib.pyplot as plt
Idl = I*np.array([0,0,1])
ri = np.array([0,0,0])
a = 0.1 # m
Lx, Ly, Nx, Ny = a,a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
y = np.linspace(-Ly,Ly,Ny)
rx,ry = np.meshgrid(x,y,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
By = np.zeros_like(ry)
for ix in range(Nx):
    for iy in range(Ny):
        r = np.array([rx[ix,iy],ry[ix,iy],0])
        Bx[ix,iy],By[ix,iy],Bz = dBfield(r,ri,Idl)
plt.figure(figsize=(5,5))
plt.subplot(1,1,1)
plt.quiver(rx,ry,Bx,By)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$y$ (m)')
plt.subplot(1,1,2)
plt.streamplot(rx.T,ry.T,Bx.T,By.T)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$y$ (m)')
```

```
Out[2]: (Text(0.5, 0, '$x$ (m)'), Text(0, 0.5, '$y$ (m)'))
```


En sirkulær strømkrets

Vi ser først på et system som består av en sirkulær krets med strøm I og radius a som ligger i xy-planet med sentrum i origo.

Oppgave (b)

Skriv en funksjon `Bcircle(r,r0,a,I,N)` som finner det magnetiske feltet $\vec{B}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r}$ fra en sirkelformet krets med en strøm I som har en radius a og ligger i et plan parallelt med xy-planet med sentrum i punktet $\vec{r}_0$. Her er N antall diskrete elementer som brukes til å beskrive sirkelen. Det er tilstrekkelig å bruke f.eks. $N = 100$.

```
In [3]:
# Svar
```

```
In [4]:
# Løsning
import numpy as np
def Bcircle(r,r0,a,I,N):
    mu0 = 1.257e-6
    R = mu0/(4*np.pi)
    B = np.array([0,0,0])
    for th in range(N):
        dth = 2*np.pi/N
        theta = (1/N)*2*np.pi
        r1 = r0 + np.array([a*np.cos(theta),a*np.sin(theta),0])
        dlvec = np.array([-np.sin(theta),np.cos(theta),0])
        R = r-r1
        dB = R*I*dl*np.cross(dlvec,R)/np.linalg.norm(R)**3
        B = B + dB
    return B
```

Sensorveiledning: max 10 poeng - Trekker 2 poeng dersom man har glemt prefaktoren $\mu_0/(4\pi)$. - Gir kun 2 poeng dersom man kun har brukt ett strømelement og ikke en sirkel til å finne feltet (altså kun har brukt eksempelet over) 4p for å lage en riktig sirkel - Gir 0p hvis det ikke er en sirkel, men f.eks. en linje - Trekker 1p hvis sirkelens sentrum ikke er riktig plassert - Trekker 2p hvis posisjonen til et punkt på sirkelen ikke er riktig regnet ut 4p poeng for å regne ut riktig bidrag fra ett strømelement i sirkelen - Trekker 2p hvis R-vektor ikke er riktig regnet ut - Trekker 1p hvis ikke lid er regnet riktig ut - Trekker 1p hvis man har glemt å dele på lengden av R\| i 2nder etter tredje| 2p for å summere bidragene inn i et B-felt og returnere B-feltet - Trekker 2p dersom man har glemt å summere sammen verdiene inn i en vektor - Trekker 1p dersom man har glemt å initiere B før summeringen

Oppgave (c)

Sjekk funksjonen din ved å sammenlikne resultatet fra funksjonen med det eksakte resultatet fra oppgave (a) ved å bruke $a = 0.1\,\text{m}$, $I = 1\text{A}$.

```
In [5]:
# Svar
```

```
In [6]:
# Løsning
# Vi tester ved å sette r0 = (5,5,0)
r0 = np.array([5,5,0])
I = 1.0
a = 0.1
N = 15 # Det betyr ikke noe hva N er for denne spesielle utregningen
r = np.array([0,0,0])
Bnum = Bcircle(r,r0,a,I,N)
print('Bnum =',Bnum,'T')
mu0 = 1.257e-6
Bexact = mu0*I/(2.*a)*np.array([0,0,1])
print('Bexact =',Bexact)

Numerisk =  [0.000e+00 0.000e+00 6.285e-06]
Eksakt =  [0.000e+00 0.000e+00 6.285e-06]
```

Sensorveiledning: max 10 poeng Merk at valget av N ikke betyr noe for denne spesifikke utregningen. Alle verdier av N er derfor ok. Men hvis man velger en N mindre enn 100 bør dette kommenteres, ellers trekkes det 2p. 6p for å bruke Bcircle korrekt - Trekk 2p hvis man ikke bruker riktig verdi for r - Trekk 1p for feil verdi for a - Trekk 1p for feil verdi for I - Trekk 2p hvis man ikke bruker riktig verdi for r0 4p for å regne ut det analytiske uttrykket fra på korrekt - Trekk 1p for feil verdi for a - Trekk 1p for feil verdi for I - Trekk 1p for feil verdi for μ_0

Oppgave (d)

Visualiser det magnetiske feltet i xz-planet. Velg et utsnitt som du anser som passende.

```
In [7]:
# Svar
```

```
In [8]:
# Løsning (1 av 2)
a = 0.1
I = 1.0
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a,2*a,21,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
Bz = np.zeros_like(rx)
r0 = np.array([0,0,0])
N = 100
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Bx[ix,iz],By,Bz[ix,iz] = Bcircle(r,r0,a,I,N)
```

```
In [9]:
# Løsning (2 av 2)
plt.figure(figsize=(5,4))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,rz,Bx,Bz)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$z$ (m)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,rz.T,Bx.T,Bz.T)
plt.xlabel('$x$ (m)')
```

```
Out[9]: Text(0.5, 0, '$x$ (m)')
```


Sensorveiledning: max 10 poeng 2p for å definere a, I, og N på en fornuftig måte - Trekker 1p hvis a ikke er rimelig valgt - Trekker 1p hvis I ikke er rimelig valgt - Trekk 1p hvis man velger N mye større eller mye mindre enn $N = 100$. 4p for å regne ut $\vec{B}$-feltet på et rimelig gitter - Trekker 1p hvis man ikke velger riktig R0 - Trekker 1p hvis gitteret er svært stort eller svært lite (bruk skjønn) 4p for å visualisere $\vec{B}$-feltet i xz-planet - Trekker 2p dersom visualiseringen ikke i xz planet for minst ett plott - Trekk 1p om plottene er for langt zoomet inn eller ut (bruk skjønn) - Trekk 1p om plottene ikke har aksebetegnelser, med enheter eller i enheter av a.

En kort solenoide

Vi skal nå se på en kort solenoide som består av M sirkulære kretser som ligger i plan parallelle med xy-planet. De har radius a og sentrum på z-aksen. Kretsene er plassert ut slik at de er jevnt fordelt fra $z = a$ til $z = -a$. Den samme strømmen I går i positiv retning i alle de M kretsene.

Oppgave (e)

Skriv en funksjon `Bsolenoide(r,a,I,N,M)` som finner det magnetiske feltet $\vec{B}(\vec{r})$ fra en solenoide som beskrevet ovenfor og som består av M sirkulære kretser. Tallet N angir antall elementer som brukes til å beskrive hver enkelt sirkulære krets.

```
In [10]:
# Svar
```

```
In [11]:
# Løsning
import numpy as np
def Bsolenoide(r,a,I,N,M):
    B = np.array([0,0,0])
    # Her summerer vi strømmer og summer bidragene
    for i in range(M):
        zi = -a + (2*a)/(M-1)*i
        r0 = np.array([0,0,zi])
        B = B + Bcircle(r,r0,a,I,N)
    return B
```

Sensorveiledning: max 10 poeng Her kan man skrive dette på nytt eller benytte 'Bcircle'. 4p for å lage en sirkel riktig - Det er her tilstrekkelig å bruk 'Bcircle', men med riktig verdi for r og r0 - Trekk som overfor hvis man ikke bruker 'Bcircle' korrekt eller skriver denne delen feil her - Trekk 2p hvis ikke R-vektor er riktig regnet ut - Trekk 2p hvis lid ikke er riktig regnet ut 4p for å kombinere M sirkler riktig - Trekk 3p hvis alle sirklene ligger oppå hverandre - Trekk 2p hvis man ikke har brukt Bcircle, men ikke angir riktige verdier for r0 2p for å summere bidragene inn i et B-felt og returnere B-feltet - Trekker 2p dersom man har glemt å summere sammen verdiene inn i en vektor - Trekker 1p dersom man har glemt å initiere B før summeringen

Oppgave (f)

Bruk funksjonen `Bsolenoide` til å visualisere det magnetiske feltet i xz-planet for $M = 5$. Velg et utsnitt som du mener er passende.

```
In [12]:
# Svar
```

```
In [13]:
# Løsning (1 av 2)
a = 0.1
I = 1.0
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a,2*a,21,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
Bz = np.zeros_like(rx)
r0 = np.array([0,0,0])
N = 150 # Antall elementer i hver krets
M = 5 # Antall sirkulære kretser
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Bx[ix,iz],By,Bz[ix,iz] = Bsolenoide(r,a,I,N,M)
```

```
In [14]:
# Løsning (2 av 2)
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,rz,Bx,Bz)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$z$ (m)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,rz.T,Bx.T,Bz.T)
plt.xlabel('$x$ (m)')
```

```
Out[14]: Text(0.5, 0, '$x$ (m)')
```


Sensorveiledning: max 10 poeng 2p for å definere a, I, og N på en fornuftig måte - Trekker 1p hvis a ikke er rimelig valgt - Trekker 1p hvis I ikke er rimelig valgt - Trekk 1p hvis man velger N mye større eller mye mindre enn $N = 100$. - Trekk 1p hvis man har valgt M feil, 4p for å regne ut $\vec{B}$-feltet på et rimelig gitter - Trekker 1p hvis man ikke velger riktig r0 - Trekker 1p hvis gitteret er svært stort eller svært lite (bruk skjønn) 4p for å visualisere $\vec{B}$-feltet i xz-planet - Trekker 2p dersom visualiseringen ikke i xz planet for minst ett plott - Trekk 1p om plottet er for langt zoomet inn eller ut (bruk skjønn) - Trekk 1p om plottene ikke har aksebetegnelser, med enheter eller i enheter av a.

Oppgave (g)

Plot det magnetiske feltet i z-retningen langs tre linjer som er parallelle med z-aksen, dvs. $\vec{B}_1(0,0,z)$, $\vec{B}_2(a/3,0,z)$ og $\vec{B}_3(2a/3,0,z)$, i området fra $z = -a$ til $z = a$. Kommenter resultatet. Stemmer dette med hva du forventer for en solenoide?

```
In [15]:
# Svar
```

```
In [18]:
# Løsning - kode
N = 150
a = 0.1
M = 5
N1 = 100
zp = np.linspace(-a,a,N1)
Bz1 = np.zeros_like(zp)
Bz2 = np.zeros_like(zp)
Bz3 = np.zeros_like(zp)
for i in range(N1):
    x1 = zp[i]
    r = np.array([0,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(r,a,I,N,M)
    Bz1[i] = Bz1
    r2 = np.array([a/3,0,x1])
    Bx2,By2,Bz2 = Bsolenoide(r2,a,I,N,M)
    Bz2[i] = Bz2
    r3 = np.array([2*a/3,0,x1])
    Bx3,By3,Bz3 = Bsolenoide(r3,a,I,N,M)
    Bz3[i] = Bz3
```

```
In [19]:
# Løsning - plot
plt.plot(zp,Bz1,label='$B_y(0,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz2,label='$B_y(a/3,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz3,label='$B_y(2a/3,0,z)$')
plt.legend()
plt.xlabel('$z$ (m)'); plt.ylabel('$B_z$')
```

```
Out[19]: (Text(0.5, 0, '$z$ (m)'), Text(0, 0.5, '$B_z$'))
```


(Løsning - tekst) Vi forventer at det magnetiske feltet skal være uniformt inne i solenoiden og null på utsiden av solenoiden. Vi ser at det er liten forskjell mellom feltet i midten, dvs. $x = 0$, og langs linjen $x = a/3$. Det er som forventet. For $x = 2a/3$ ser vi at det er en viss variasjon langsmed solenoiden. Det skyldes endeeffekter. Vi forventer at begge disse variasjonene vil bli mindre hvis f.eks. solenoiden gjøres lang i forhold til radius. Vi ser også at det er en viss variasjon langsmed solenoiden for $x = 2a/3$. Det skyldes at solenoiden kun har 5 vindinger. Hvis vi økte dette til 10 eller 100 ville vi fått en jevnere oppførsel.

Hvis vi plotter feltet utenfor solenoide, f.eks. for $x = 2a$, ville vi sett at feltet på utsiden av solenoiden er mye mindre enn inne i solenoiden. Det går ikke helt til null, slik vi forventer for en uendelig lang solenoide. Det er ikke uventet siden solenoiden kun har en endelig lengde. Feltet utenfor peker i negativ z-retning som forventet.

Sensorveiledning: max 10 poeng 4p for å hente ut riktige verdier - Trekk 1p hvis antall punkter i plottet er svært få punkter - Trekk 1p hvis man regner ut feil sted (1p for hver av de 3 stedene) 5p for å plotte verdiene riktig - Trekk 1p hvis aksene ikke er angitt - Trekk 1p hvis aksene ikke har enheter (eller er delt på a) 3p for å kommentere resultatet - Trekk 1p dersom det ikke kommenteres at feltet burde være uniformt inne i solenoiden - Trekk 1p dersom man ikke kommenterer feltet for $2a/3$

```
In [ ]:
```