Eksamen i Fys1120 H2024

Magnetisk felt i og rundt en kort solenoide

Vi skal i denne oppgaven studere det magnetiske feltet inne i og rundt en solenoide med strøm I og antall vindinger $M = 5$. Vi studerer først en enkelt sirkulær krets. Deretter setter vi sammen M kretser for å lage en modell for en solenoide.

Oppgave (a)

En sirkulær krets med radius a ligger i xy-planet med sentrum i origo. Det går en strøm I gjennom kretsen i positiv rotasjonsretning. Vis at det magnetiske feltet i origo blir

$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$$

(Svar her)

(Løsning) Vi ser på et bidrag fra et strøm element $I\,d\vec{l}$ i posisjonen $\vec{r}$. For dette elementet blir $\vec{R} = \vec{0} - \vec{r} = -\vec{r}$. Bidraget til det magnetiske feltet i origo blir da

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^2}$$

Her ser vi at $d\vec{l}$ og $\vec{R}$ står normalt på hverandre og kryssproduktet vil peke i z-retningen. Det gir

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d l R}{R^2}\hat{z}$$

Vi ser at $\vec{R} = a\,\hat{\rho}$ ikke endrer seg langs sirkelen. Vi summerer (integrerer) opp alle bidragene fra hele sirkelene som har en lengde $2\pi a$ og får

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I 2\pi a}{a^2}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$$

Eksempel

Som hjelp til å løse oppgaven nedenfor kan du ta utgangspunkt i dette eksempelet.

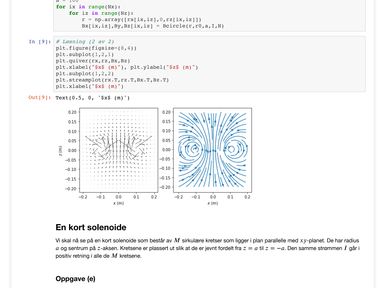
Bidraget til det magnetiske feltet $d\vec{B}$ i punktet $\vec{r}$ fra et strømelement $I\,d\vec{l}$, i punktet $\vec{r}_i$ er gitt av funksjonen `dBfield(r,ri,Idl)`

In [1]:
```
import numpy as np
def dBfield(r,ri,Idl):
    mu0 = 1.257e-6
    R = r - ri
    return mu0/(4*np.pi)*np.cross(Idl,R)/np.linalg.norm(R)**3
```

Det magnetiske feltet fra et strømelement $I\,d\vec{l}$ i origo rettet langs z-aksen kan visualiseres i xy-planet ved

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
Idl = 1.0*np.array([0,0,1])
ri = np.array([0,0,0])
a = 0.1 # m
Lx, Ly, Nx, Ny = a,a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
y = np.linspace(-Ly,Ly,Ny)
rx,ry = np.meshgrid(x,y,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
By = np.zeros_like(rx)
for ix in range(Nx):
    for iy in range(Ny):
        r = np.array([rx[ix,iy],ry[ix,iy],0])
        Bx[ix,iy],By[ix,iy],Bz = dBfield(r,ri,Idl)
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,ry,Bx,By)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$y$ (m)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,ry.T,Bx.T,By.T)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$y$ (m)')
```

Out[2]: (Text(0.5, 0, 'x (m)'), Text(0, 0.5, 'y (m)'))



En sirkulær strømkrets

Vi ser først på et system som består av en sirkulær krets med strøm I og radius a som ligger i xy-planet med sentrum i origo.

Oppgave (b)

Skriv en funksjon `Bcircle(r,r0,a,I,N)` som finner det magnetiske feltet $\vec{B}(\vec{r})$ i punktet $\vec{r}$ fra en sirkelformet krets med en strøm I som har en radius a og ligger i et plan parallelt med xy-planet med sentrum i punktet $\vec{r}_0$. Her er N antall diskrete elementer som brukes til å beskrive sirkelen. Det er tilstrekkelig å bruke 4 eks. $N = 100$.

In [3]:
```
# Svar
```

In [4]:
```
# Svar
import numpy as np
def Bcircle(r,r0,a,I,N):
    mu0 = 1.257e-6
    K = mu0/(4*np.pi)
    B = np.array([0,0,0])
    Idl = np.array([0,0,1])
    for i in range(N):
        theta = (i/N)*2*np.pi
        r1 = r0 + np.array([a*np.cos(theta),a*np.sin(theta),0])
        dlvec = np.array([-np.sin(theta),np.cos(theta),0])
        R = r-r1
        dB = K*Idl*np.cross(dlvec,R)/np.linalg.norm(R)**3
        B = B + dB
    return B
```

Oppgave (c)

Sjekk funksjonen din ved å sammenlikne resultatet fra funksjonen med det eksakte resultatet fra oppgave (a) ved å bruke $a = 0.1\,\text{m}$, $I = 1\text{A}$.

In [5]:
```
# Svar
```

In [6]:
```
# Løsning
# Vi tester ved å sette r0 = (0,0,0)
r0 = np.array([0,0,0])
I = 1.0
a = 0.1
N = 10 # Det betyr ikke noe hva N er for denne spesielle utregningen
r = np.array([0,0,0])
Bnum = Bcircle(r,r0,a,I,N)
print('Numerisk = ',Bnum)
mu0 = 1.257e-6
Bexact = mu0*I/(2.0*a)*np.array([0,0,1])
print('Eksakt = ',Bexact)

Numerisk =  [0.000e+00 0.000e+00 4.285e-06]
Eksakt =  [0.000e+00 0.000e+00 6.285e-06]
```

Oppgave (d)

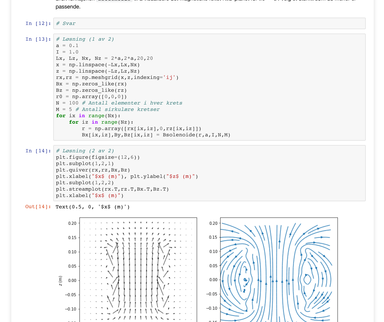
Visualiser det magnetiske feltet i xz-planet. Velg et utsnitt som du anser som passende.

In [7]:
```
# Svar
```

In [8]:
```
# Løsning (1 av 2)
a = 0.1
I = 1.0
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a,2*a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
Bz = np.zeros_like(rx)
r0 = np.array([0,0,0])
N = 100
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Bx[ix,iz],By,Bz[ix,iz] = Bcircle(r,r0,a,I,N)
```

In [9]:
```
# Løsning (2 av 2)
plt.figure(figsize=(9,6))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,rz,Bx,Bz)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$z$ (m)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,rz.T,Bx.T,Bz.T)
plt.xlabel('$x$ (m)')
```

Out[9]: Text(0.5, 0, 'x (m)')



En kort solenoide

Vi skal nå se på en kort solenoide som består av M sirkulære kretser som ligger i plan parallelle med xy-planet. De har radius a og sentrum på z-aksen. Kretsene er plassert slik at de er jevnt fordelt fra $z = a$ til $z = -a$. Den samme strømmen I går i positiv retning i alle de M kretsene.

Oppgave (e)

Skriv en funksjon `Bsolenoide(r,a,I,N,M)` som finner det magnetiske feltet $\vec{B}(\vec{r})$ fra en solenoide som beskrevet ovenfor og som består av M sirkulære kretser. Talet N angir antall elementer som brukes til å beskrive hver enkelt sirkulære krets.

In [10]:
```
# Svar
```

In [11]:
```
# Løsning
import numpy as np
def Bsolenoide(r,a,I,N,M):
    B = np.array([0,0,0])
    # Lag M sirkulære strømmer og summer bidragene
    for i in range(M):
        z1 = -a + (2*a)/(M-1)*i
        r0 = np.array([0,0,z1])
        B = B + Bcircle(r,r0,a,I,N)
    return B
```

Oppgave (f)

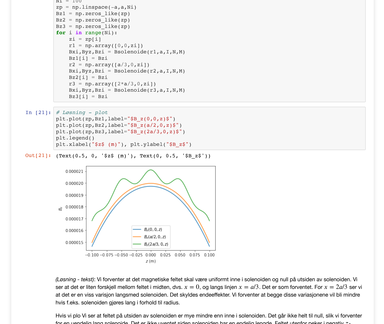
Bruk funksjonen `Bsolenoide` til å visualisere det magnetiske feltet i xz-planet for $M = 5$. Velg et utsnitt som du mener er passende.

In [12]:
```
# Svar
```

In [13]:
```
# Løsning (1 av 2)
a = 0.1
I = 1.0
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a,2*a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
Bz = np.zeros_like(rx)
r0 = np.array([0,0,0])
N = 50 # Antall elementer i hver krets
M = 5 # Antall sirkulære kretser
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Bx[ix,iz],By,Bz[ix,iz] = Bsolenoide(r,a,I,N,M)
```

In [14]:
```
# Løsning (2 av 2)
plt.figure(figsize=(12,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,rz,Bx,Bz)
plt.xlabel('$x$ (m)'); plt.ylabel('$z$ (m)')
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,rz.T,Bx.T,Bz.T)
plt.xlabel('$x$ (m)')
```

Out[14]: Text(0.5, 0, 'x (m)')



Oppgave (g)

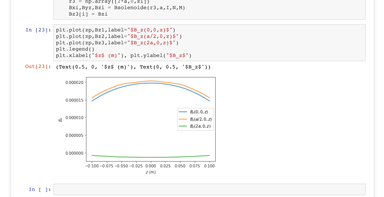
Plott det magnetiske feltet i z-retningen langs tre linjer som er parallelle med z-aksen, dvs. $B_z(0,0,z)$, $B_z(a/3,0,z)$ og $B_z(2a/3,0,z)$, i området fra $z = -a$ til $z = a$. Kommenter resultatet. Stemmer dette med hva du forventer for en solenoide?

In [15]:
```
# Svar
```

In [20]:
```
# Løsning - kode
N = 100
a = 0.1
M = 5
Ni = 100
z = np.linspace(-a,a,Ni)
Bz1 = np.zeros_like(z)
Bz2 = np.zeros_like(z)
Bz3 = np.zeros_like(z)
for i in range(Ni):
    x1 = z[i]
    r1 = np.array([0,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(r1,a,I,N,M)
    Bz1[i] = Bz1
    x2 = np.array([a/3,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(x2,a,I,N,M)
    Bz2[i] = Bz1
    x3 = np.array([2*a/3,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(x3,a,I,N,M)
    Bz3[i] = Bz1
```

In [21]:
```
# Løsning - plott
plt.plot(zp,Bz1,label='$B_z(0,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz2,label='$B_z(a/3,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz3,label='$B_z(2a/3,0,z)$')
plt.legend()
plt.xlabel('$z$ (m)'); plt.ylabel('$B_z$')
```

Out[21]: (Text(0.5, 0, 'z (m)'), Text(0, 0.5, 'B_z'))



(Løsning - tekst) Vi forventer at det magnetiske feltet skal være uniformt inne i solenoiden og null på utsiden av solenoiden. Vi ser at det er liten forskjell mellom feltet i midten, dvs. $x = 0$, og langs linjen $x = a/3$. Det er som forventet. For $x = 2a/3$ ser vi at det er en viss variasjon langsmed solenoiden. Det skyldes endeeffekter. Vi forventer at begge disse variasjonene vil bli mindre hvis teks. solenoiden gjøres lang i forhold til radius.

Hvis vi øker M ser at feltet på utsiden av solenoiden er mye mindre enn inne i solenoiden. Det går ikke helt til null, slik vi forventer for en uendelig lang solenoide. Det er ikke uventet siden solenoiden har en endelig lengde. Feltet *utenfor peker i negativ* z-retning som forventet.

In [22]:
```
# Sammenlikning innenfor og utenfor
N = 100
a = 0.1
M = 5
Ni = 100
zp = np.linspace(-a,a,Ni)
Bz1 = np.zeros_like(zp)
Bz2 = np.zeros_like(zp)
Bz3 = np.zeros_like(zp)
for i in range(Ni):
    x1 = zp[i]
    r1 = np.array([0,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(r1,a,I,N,M)
    Bz1[i] = Bz1
    x2 = np.array([a/2,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(x2,a,I,N,M)
    Bz2[i] = Bz1
    x3 = np.array([2*a/3,0,x1])
    Bx1,By1,Bz1 = Bsolenoide(x3,a,I,N,M)
    Bz3[i] = Bz1
```

In [23]:
```
plt.plot(zp,Bz1,label='$B_z(0,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz2,label='$B_z(a/2,0,z)$')
plt.plot(zp,Bz3,label='$B_z(2a/3,0,z)$')
plt.legend()
plt.xlabel('$z$ (m)'); plt.ylabel('$B_z$')
```

Out[23]: (Text(0.5, 0, 'z (m)'), Text(0, 0.5, 'B_z'))

In [ ]:
```

```