UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Tirsdag 3 desember 2023, 15:00 til 19:00

Oppgave 1: Ladninger

To ladninger ligger i vakuum. Ladningen $-Q$ ligger i punktet $(0, a, 0)$ og ladningen $+Q$ ligger i punktet $(0, -a, 0)$.

a) Hva blir det elektriske feltet i punktet $(0, 0, 0)$?

Solution. Vi bruker superposisjonsprinsippet og finner at

$$\mathbf{E}(0,0,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} \tag{1}$$

Vi plasserer så ytterligere to ladninger i systemet. En ladning $-Q$ i punktet $(0, 2a, 0)$ og en ladning $+Q$ i punktet $(0, -2a, 0)$.

b) Hva blir nå det elektriske feltet i origo?

Solution. Det elektriske feltet blir nå

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2}\hat{\mathbf{y}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\hat{\mathbf{y}}\,. \tag{2}$$

Vi plasserer så ytterligere ladninger ut slik at det er en ladning $+Q$ i alle punktene $(0, -ia, 0)$ og en ladning $-Q$ i alle punktene $(0, +ia, 0)$ hvor $i = 1, 2, 3, \ldots$. Det er altså uendelig mange ladninger.

c) Hva blir nå det elektriske feltet i origo.

Solution. Etter mønster fra forrige oppgave ser vi at det elektriske feltet blir

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\hat{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\,. \tag{3}$$

Det er her tilstrekkelig å sette opp summen for å få 4. For å få 5 må man slå opp denne summen i Rothman. Da finner man at denne summen er $\pi^2/6$.

Oppgave 2: Kule med hull

En kule er laget av et materiale med uniform ladningstetthet ρ. Kulen har en radius a og er plassert med sentrum i origo. Systemet er i vakuum.

a) Hva er det elektriske feltet utenfor kulen?

Answer. $E_r = \rho a^3/(3\epsilon_0 r^2)$.

Solution. Vi bruker Gauss lov. Fordi systemet er kulesymmetrisk bruker vi kulekoordinator. Det elektriske feltet kan kun avhenge av avstanden r til sentrum. Det elektriske feltet kan også kun ha en radiell komponent pga kulesymmetrien, da en rotasjon av kulen må gi det samme feltet. Vi velger en Gauss flate som en kuleflate med radius r. Ladningen innenfor r blir da ladningen til hele kulen som er $Q = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho a^3$. Gauss lov gir da at

$$\oint_S E_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}\rho a^3 \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \, . \tag{4}$$

b) Hva er det elektriske feltet inne i kulen?

Answer. $E_r = \rho r/(3\epsilon_0)$

Solution. Inne i kulen kan vi bruke samme fremgangsmåte, men vi må ta hensyn til at ladningen innenfor r avhenger av r: $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ slik at

$$\oint_S E_r \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \, . \tag{5}$$

c) Vi lager så et kuleformet hull med radius $b < a$ og med sentrum i midten av kulen. Hva blir nå det elektriske feltet overalt i rommet?

Answer. $E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(a^3 - b^3)$ for $r > a$, $E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{r^3 - b^3}{r^2}$ for $b < r < a$ og $E_r = 0$ for $r < b$.

Solution. Utenfor kulen er det kun ladningen inne i kulen som er endret til $Q(a) = \frac{4\pi}{3}\rho(a^3 - b^3)$, slik at feltet her blir

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(a^3 - b^3) \, . \tag{6}$$

Inne i hullet, det vil si for $r < b$ vil det ikke være noen ladning innenfor Gauss-flaten, og det elektriske feltet blir null. I området $b < r < a$ så må vi nå bruke at $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho(r^3 - b^3)$. Det elektriske feltet i området $b < r < a$ blir derfor

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{r^3 - b^3}{r^2} \, . \tag{7}$$

Oppgave 3: Plane ladninger

Et system består av en tynn plate med areal A og ladning $2Q$ som ligger parallellt med xy-planet i $z = a$ og en tynn plate med areal A og ladning $-Q$ som ligger parallellt med xy-planet i $z = -a$. Systemet er i vakuum. Du kan anta at avstanden mellom platene er svært liten sammenliknet med utstrekningen av platene, slik at du kan se bort fra kanteffekter.

a) Hva er det elektriske feltet langs z-aksen?

Solution. Vi finner det elektriske feltet ved å finne det elektriske feltet fra en plate med ladning q i xy-planet og så summere effekten fra de to platene. For en plate med ladning q og areal A, kan vi anvende Gauss lov. Pga symmetri antar vi at feltet ikke avhenger av x eller y og at det ikke er noen x eller y komponent av det elektriske feltet. Feltet har derfor formen $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi forventer også at feltet er symmetrisk om planet, slik at $E_z(-z) = -E_z(z)$. Vi velger en Gauss-flate som f.eks. en sylinder med overflate S og som strekker seg fra $-z$ til z. Gauss lov gir da at

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E_z(z)S - (E_z(-z))S = 2E_z S = \frac{\rho_S S}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \,. \tag{8}$$

Her er $\rho_S = q/A$ slik at $E_z = (q/A)/(2\epsilon_0)$.

Vi bruker så superposisjonsprinsippet for å finne det elektriske feltet fra de to platene. For $z > a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = \frac{2Q/A}{2\epsilon_0} - \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = \frac{Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{9}$$

For $-a < z < a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = -\frac{2Q/A}{2\epsilon_0} - \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = -\frac{3Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{10}$$

Og for $z < -a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = -\frac{2Q/A}{2\epsilon_0} + \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = -\frac{Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{11}$$

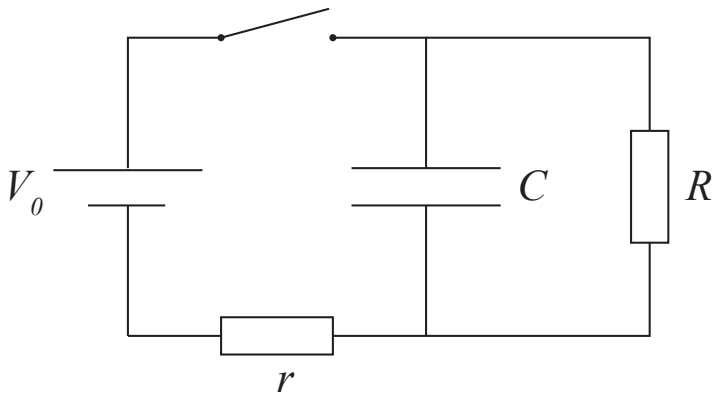
b) Hvis platen ved $z = -a$ har potensialet $V = 0$, hva er det potensialet til den øverste platen ved $z = a$?

Solution. Vi finner potensialet ved å integrere det elektriske feltet fra den nedre til en øvre platen

$$V(a) - V(-a) = V(a) - 0 = -\int_{-a}^{a} -\frac{3Q/A}{2\epsilon_0} \mathrm{d}z = \frac{3Q/A}{2\epsilon_0} 2a = \frac{3(Q/A)a}{\epsilon_0} \,. \tag{12}$$

Oppgave 4: Krets

Figuren viser en krets som består av et batteri, V_0, en bryter, en kondensator C og to motstander R og r.



a) Din venn Q sier at når bryteren er åpen som på figuren så kan det ikke gå noen strøm noe sted i kretsen. Har Q rett? Begrunn svaret ditt kort?

Answer. Nei.

Solution. Nei. Det kan fremdeles gå en strøm i den lukkede sløyfen som består av motstanden R og kondensatoren C. Dette kan f.eks. skje hvis kondensatoren er ladet opp når bryteren åpnes.

b) Anta at bryteren har vært åpen (slik at det ikke går noe strøm gjennom bryteren) i svært lang tid. Så lukker vi bryteren. Hva blir spenningen V_1 over kondensatoren når systemet har nådd en stasjonær tilstand?

Answer. $V_1 = V_0 R/(R+r)$

Solution. Når systemet har nådd en stasjonær tilstand vil kondensatoren ha ladet seg opp slik at det ikke lenger går noen strøm gjennom kondensatoren. Da går all strøm gjennom motstanden R. Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom batteriet, motstanden R og motstanden r gir da at

$$V_0 - IR - Ir = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_0}{R+r} \, . \tag{13}$$

Spenningen over kondensatoren C må være den samme som spenningen over motstanden R, slik at

$$V_1 = IR = V_0 \frac{R}{R+r} \, . \tag{14}$$

c) Etter at systemet har nådd en stasjonær tilstand åpner vi bryteren (slik at det ikke går noen strøm gjennom bryteren). Hva er strømmen I_0 gjennom motstanden R umiddelbart etter at vi hår åpnet bryteren?

Answer. $I_0 = V_0/(r+R)$

Solution. Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom kondensatoren og motstanden R gir

$$V_C - I_0 R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{V_C}{R} = \frac{V_0}{R+r} \, . \tag{15}$$

Hvor vi har satt inn at $V_C = V_1 = V_0 R/(r+R)$ umiddelbart etter at bryteren er åpnet.

d) Finn en differensiallikning som vi kan løse for å finne spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden etter at bryteren ble åpnet. (Du behøver ikke løse denne differensiallikningen).

Answer. $dV/dt = -V/(RC)$

Solution. Vi vet at $C = Q/V$ slik at spenningen V over kondensatoren vil være $V = (1/C)Q$. Strømmen I gjennom motstanden R vil være $I = -dQ/dt$, hvor vi har valgt at I er positiv når det strømmer ladning ut av kondensatoren. Vi ser da at

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{C} I \, . \tag{16}$$

Vi kan finne I fra Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom kondensatoren og motstanden R:

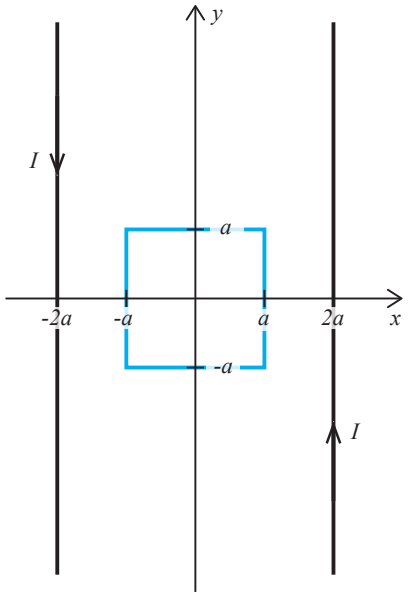
$$V - IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R} \, . \tag{17}$$

Tilsammen gir dette at

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C} I = -\frac{1}{RC} V \, . \tag{18}$$

Oppgave 5: To lange ledninger og et kvadrat

Figuren viser et system som består av to tynne, lange ledninger. Den ene ledningen ligger parallellt med y-aksen gjennom $(-2a, 0, 0)$. Det går en strøm I i negativ y-retning gjennom denne ledningen. Den andre ledningen ligger parallellt med y-aksen gjennom $(2a, 0, 0)$. Det går en strøm I i positiv y-retning gjennom denne ledningen.



a) Vis at det magnetiske feltet alle steder i xy-planet er

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{(2a+x)} + \frac{1}{(2a-x)}\right) .$$

Solution. Vi kan her bruke superposisjonsprinsippet og summere bidragene fra de to ledningene. Vi kan bruke Amperes lov til å finne det magnetiske feltet fra en ledning med en strøm I i positiv retning langs y-aksen. Vi bruker sylinderkoordinater og innser at feltet kun kan avhenge av r. Fra Biot-Savarts lov ser vi at feltet ikke kan ha noen komponent langs z-aksen fordi strømmen går i denne retningen. Fordi divergensen til **B**-feltet er null, kan feltet heller ikke ha noen komponent i r-retningen. Vi finner ϕ-komponenten av feltet fra en Ampere-løkke i form av en sirkel med radius r rundt lederen. Det går en strøm I gjennom denne løkken. Amperes lov gir da at

$$\oint B_\phi \mathrm{d}l = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} . \tag{19}$$

Vi setter så sammen feltene fra de to ledningene. Feltet fra ledningen gjennom $(-2a, 0, 0)$ vil gi et bidrag $B_z = \mu_0 I/(2\pi(x+2a)$. Vi ser at dette gir riktig fortegn både for $x > -2a$ og for $x < -2a$. Feltet fra ledningen gjennom $(2a, 0, 0)$ vi gi et bidrag $B_z = \mu_0 I/(2\pi(2a-x)$. Vi merker oss at dette feltet også gir riktig fortegn både for $x > 2a$ og for $x < 2a$. Til sammen blir det magnetiske feltet

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a+x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a-x)} . \tag{20}$$

Vi plasserer en ledning formet som et kvadrat i xy-planet som vist i figuren. Sidene i kvadratet skjærer x-aksen i punktene $(-a, 0, 0)$ og $(a, 0, 0)$ og y-aksen i punktene $(0, a, 0)$ og $(0, -a, 0)$ som vist i figuren.

b) Hva er fluksen av det magnetiske feltet fra de to lange ledningene gjennom kvadratet?

Answer. $\Phi = 2a(\mu_0 I/\pi)\ln 3$

Solution. Vi kan være lure å finne fluksen fra en av ledningene og så innse at fluksen fra den andre ledningen blir like stor, slik at vi kan gange med to eller vi kan finne den totale fluksen direkte. Vi orienterer den kvadratiske kretsen slik at overflaten peker i positiv z-retning.

Vi finner fluksen fra ledningen gjennom $(-2a, 0, 0)$ gjennom kvadratet ved å finne integralet

$$\Phi_1 = \int \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int B_z \mathrm{d}S = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} B_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\int_{-a}^{a} B_z \mathrm{d}x\ . \tag{21}$$

Vi setter inn $B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a+x)}$ og finner

$$\Phi_1 = 2a\int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a+x)}\mathrm{d}x \tag{22}$$

Vi setter inn $u = 2a + x$ slik at $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Det gir

$$\Phi_1 = 2a\int_{a}^{3a} \frac{\mu_0 I}{2\pi u}\mathrm{d}u = 2a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln 3a - \ln a\right) = 2a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 3\ . \tag{23}$$

Den totale fluksen blir det dobbelte av dette $\Phi = 2\Phi_1 = 4a(\mu_0 I/2\pi)\ln 3 = 2a(\mu_0 I/\pi)\ln 3$.

c) Hva blir den gjensidige induktansen L_{12} for krets 1 som består av de to lange ledningene og krets 2 som er kvadratet?

Answer. $L = (2/\pi)a\mu_0 \ln 3$

Solution. Vi kan her benytte symmetrien til den gjensidige induktansen og finne $L_{2,1}$, som er lettere å finne. Denne vil så være lik $L_{1,2}$. Den gjensidige induktansen er gitt som $L_{2,1} = \Phi_2/I_1 = (2/\pi)a\mu_0 \ln 3$.

d) Blir den gjensidige induktansen større eller mindre hvis vi skyver kvadratet mot en av de lange ledningene? Begrunn svaret.

Solution. Vi kan her enten argumentere kvalitativt eller vi kan regne ut resultatet.

Vi starter med et kvalitativt argument. Hvis vi plasserer kvadratet tett inntil en av lederne, så vil vi finne fluksen fra et integral over et magnetfelt som divergerer som $1/r$ hvor r er avstanden inn til lederen. Dette integralet vil også divergere når avstanden r inn til lederen går mot null. Vi forventer derfor at fluksen vil divergere når avstanden til lederen går mot null. Den gjensidige induktansen blir derfor i alle fall større hvis vi skyver kvadratet helt inn mot en av de lange ledningene.

Vi kan også regne ut resultatet. La oss anta at vi har plassert den venstre siden av kvadratet i posisjonen x. Hva blir da fluksen gjennom kvadratet? Vi må da summere bidragene fra begge de magnetiske feltene:

$$\Phi = 2a\int_x^{x+2a}\left(\frac{\mu_0 I}{2a+x}+\frac{\mu_0 I}{2a-x}\right)\mathrm{d}x = 2a\mu_0 I\left(\ln(2a+x+2a)-\ln(2a+x)-\ln(2a-(x+2a))+\ln(2a-x\right. \tag{24}$$

Vi kan så finne ekstremalverdiene til denne funksjonen, ved å derivere den igjen. (Det er her også helt greit å ikke gjøre integralet, men å gå direkte til den deriverte av Φ). Vi finner at

$$\Phi'(x) = 2a\mu_0 I\left(\frac{1}{4a+x}-\frac{1}{2a+x}-\frac{1}{2a-x}-\frac{1}{x}\right)\,. \tag{25}$$

Vi ser at denne er null for $x=-a$. Vi kan finne den andrederiverte i $x=-a$. Denne er

$$\Phi''(x) = 2a\mu_0 I\left(-\frac{1}{(4a+x)^2}+\frac{1}{(2a+x)^2}-\frac{1}{(2a-x)^2}+\frac{1}{x^2}\right)\,. \tag{26}$$

I $x=-a$ er denne positiv. Det betyr at $x=-a$ er et lokalt minimum for fluksen. En endring vil derfor føre til større fluks og dermed større gjensidig induktans.