UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Onsdag 3 desember 2025, 15:00 til 19:00

Oppgave 1: Ladninger

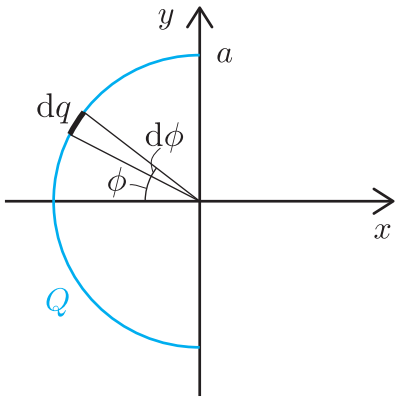
a) En ladning Q ligger i punktet $(-a, 0)$. Hva er det elektriske feltet fra denne ladningen i punktet $(0, 0)$?

Solution. Det elektriske feltet er gitt ved Coloumbs lov's

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3} ,$$

hvor $\mathbf{R} = (0, 0) - (-a, 0) = (a, 0)$. Dermed er

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

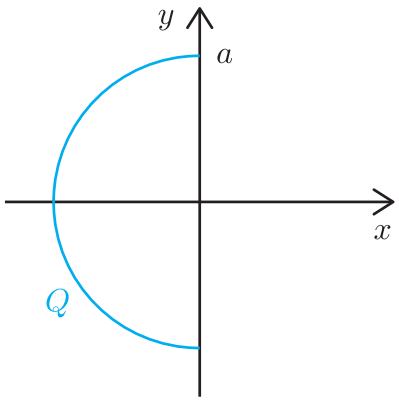


b) En ladning Q er jevnt fordelt utover en halvsirkel med radius a som vist i figuren. Vis at bidraget til x-komponenten av det elektriske feltet i origo, $\mathrm{d}\,E_x$, fra et lite ladningselement $\mathrm{d}\,q$ som ligger ved vinkelen ϕ er gitt som:

$$\mathrm{d}E_x = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$

Solution. Ladningen til elementet er $\mathrm{d}q = \rho a \mathrm{d}\phi$, hvor $\rho = Q/L$ og $L = \pi a$ er lengden av halvsirkelen. Bidraget til det elektriske feltet E_x for et element $\mathrm{d}\phi$ er

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\rho a \mathrm{d}\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\phi}{a^3} = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$



c) En ladning Q er jevnt fordelt utover en halvsirkel med radius a som vist i figuren. Hva er x-komponenten av det elektriske feltet i origo? Hva er y-komponenten av det elektriske feltet i origo?

Solution. Vi finner det elektriske feltet ved å bruke superposisjonsprinsippet og summere bidragene fra små ladningselementer $\mathrm{d}q$ ved vinkelen ϕ.

Systemet er symmetrisk omkring y-aksen, så y-komponenten vil være null, fordi det for ethvert element for $y > 0$ vil finnes et tilsvarende element for $y < 0$ slik at y-komponentene av det elektriske feltet kansellerer.

Vi integrerer $\mathrm{d}E_x$ fra $-\pi/2$ til $\pi/2$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\mathrm{d}\phi = 2$$

og finner at

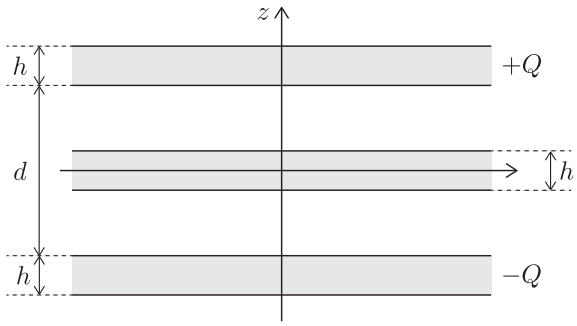
$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2}\,2 = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$$

Oppgave 2: Kondensator

Figuren viser et tverrsnitt gjennom to plane, ideelle ledere med tykkelse h og areal A i vakuum. Lederne er plassert i en avstand d fra hverandre. Den øverste lederen har ladningen $+Q$ og den nederste har ladningen $-Q$. En nøytral, ideell plan leder med tykkelse h er plassert midt mellom de to andre planene. Du kan anta at planene har så

stor utstrekning at du kan se bort fra kanteffekter. Du kan i denne oppgaven bruke at det elektriske feltet fra en plan, uniform overflateladning ρ_s i xy-planet er

$$E_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|} \, .$$



a) Skisser og beskriv hvordan ladningene er fordelt i de tre lederne.

Solution. Ladningene vil fordele seg slik at det ikke er noe elektrisk felt innen i lederne. Hvis vi først ser på systemet bestående av den øverste og den nederste lederen, ser vi at ladningen $+Q$ vil være uniformt fordelt på den nederste overflaten til den øverste lederen. Tilsvarende vil ladningen $-Q$ være uniformt fordelt på den øverste overflaten av den nederste lederen. Med denne fordelingen av ladninger vil det elektriske feltet være null inne i lederne, men forskjellig fra null i området mellom lederne.

Vi ser så på ladningen på den midterste, nøytrale lederen. Denne må ha en ladningsfordeling som ikke gir noe felt inne i de andre lederne, men som samtidig gir null felt inne i lederen. Det får vi til ved å plassere en ladning $-Q$ uniformt fordelt på den øverste overflaten og en ladning $+Q$ uniformt fordelt fra den nederste overflaten.

b) Finn det elektriske potensialet, $V(z)$, som funksjon av z. Vi plasserer nullpunktet for potensialet midt i den midterste lederen, ved $z = 0$.

Solution. Det elektriske feltet fra en plan ladning Q uniformt fordelt på overflaten av en av lederne er $E_z = Q/(2A\epsilon_0)$ pekende vekk fra planet. Vi bruker superposisjonsprinsippet for å finne det elektriske feltet. I området mellom de to ladede planene er det elektriske feltet summen av feltet fra den øverste lederen og den nederste lederen. Hver bidrar med $E_z = Q/(2A\epsilon_0)$ i den negative z-retningen, slik at feltet blir

$$E_z = -\frac{Q}{A\epsilon_0}$$

Men inne i den midterste lederen må det elektriske feltet være null. Dermed blir det elektriske feltet

$$E_z = \begin{cases} 0 & \text{for } d/2 < z \\ -\frac{Q}{A\epsilon_0} & \text{for } h/2 < z < d/2 \\ 0 & \text{for } -d/2 < z < d/2 \\ -\frac{Q}{A\epsilon_0} & \text{for } -d/2 < z < -h/2 \\ 0 & \text{for } z < -d/2 \end{cases} .$$

Basert på dette kan vi finne det elektriske potensialet. Vi ser at potensialet er null ved $z = 0$, da det elektriske potensialet er det samme inne i en leder. Vi finner potensialet ved å integrere det elektriske feltet:

$$V(z) = \int_z^0 E_z \, \mathrm{d}z$$

i intervallet $h/2 < z < d/2$ blir dette

$$V(z) = \frac{Q}{A\epsilon_0}(z - h/2)$$

mens i intervallet $-d/2 < z < -h2$ blir det

$$V(z) = \frac{Q}{A\epsilon_0}(z + h/2)$$

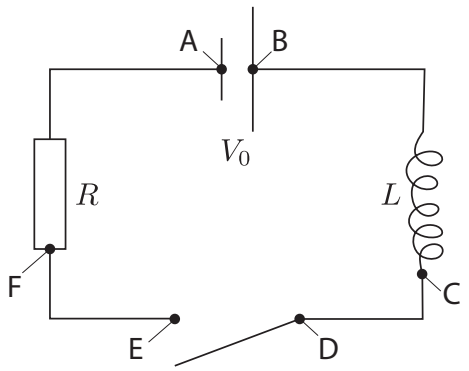
c) Finn kapasitansen til dette systemet. Kommenter effekten av å plassere en leder i midten av systemet.

Solution. Potensialforskjellen mellom de to lederne med ladning $+Q$ og $-Q$ er $\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0}(d/2 - h/2) - \frac{Q}{A\epsilon_0}(-d/2 + h/2) = \frac{Q}{A\epsilon_0}(d - h)$ slik at $C = Q/\Delta V$ blir $C = A\epsilon_0/(d - h)$.

Vi ser at effekten av å plassere en leder med tykkelse h i midten av systemet er å redusere den effektive avstanden mellom kondensatorplatene med h. Dette gjør altså kapasitansen større.

Oppgave 3: Krets

Figuren viser en krets som består av en motstand R, et batteri med spenning V_0, en spole med induktans L og en bryter.



a) Anta at bryteren har vært åpen svært lenge, slik at det ikke går noe strøm i kretsen. Anta at potensialet i punktet A i figuren er null. Hva er potensialene i de andre punktene, B-F, i figuren. Begrunn svaret kort.

Solution. I punktet B er potensialet V_0 høyere enn i A fordi batteriet setter opp en spenning V_0: $V_A = 0$, $V_B = V_0$. Siden det ikke går noen strøm i systemet er potensialet i F det samme som i A: $V_F = 0$, og potensialet i E er det samme som i F siden de er koblet sammen med en (ideell) leder: $V_E = V_F = 0$. Potensialet i C er det samme som i B, fordi det ikke er noen endring i strømmen gjennom spolen og det derfor ikke er noe spenningsfall over spolen, $V_C = V_B = V_0$. Vi ser at potensialet i D er det samme som i C siden de er koblet sammen med en ideell leder, $V_D = V_0$.

b) Anta at vi lukker bryteren ved tiden $t = 0$ slik at det nå kan gå strøm i kretsen. Hva er strømmen, $I(0)$ ved tiden $t = 0$? Hva blir strømmen i kretsen etter svært lang tid, $I(\infty)$?

Solution. Ved tiden $t = 0$ vil det ikke gå noen strøm i kretsen, $I(0) = 0$. Da vil spenningsfallet over spolen være det samme som spenningsøkningen over batteriet. Etter svært lang tid vil strømmen være tilnærmet konstant. Det er da ikke lenger noe spenningsfall over spolen. Kirchoff spenningslov gir oss da at $V_0 - RI(\infty) = 0$ og $I(\infty) = V_0 = /R$.

c) Finn en differensiallikning for strømmen i kretsen og finn løsningen til likningen.

Solution. Kirchoffs spenningslov for kretsen gir at

$$V_0 - RI - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

Slik at

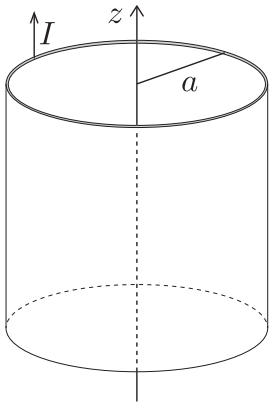
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L} - \frac{R}{L}I$$

Vi finner først løsningen av den homogene differensiallikningen $L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = -RI$ som gir $\tau = L/R$ og $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Vi forventer at denne inhomogene likningen har løsningen $I = A + Be^{-t/\tau}$. Vi vet at $I(0) = 0$ slik at $B = -A$ og $I(t) = A(1 - e^{-t/\tau})$. Vi vet at $I(\infty) = A = V_0/R$, slik at $I(t) = (V_0/R)(1 - e^{-t/\tau})$. Løsningen er derfor

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/(L/R)}\right) .$$

Oppgave 4: Magnetfelt

Figuren viser en uendelig lang leder formet som et tynt sylinderskall med radius a. Det går en strøm I gjennom sylinderskallet i positiv z-retning. (Merk at dette er et uendelig tynt ledende sylinderskall og ikke en massiv sylinder).



a) Finn magnetfeltet **B** overalt i rommet, både innenfor og utenfor sylinderskallet med radius a.

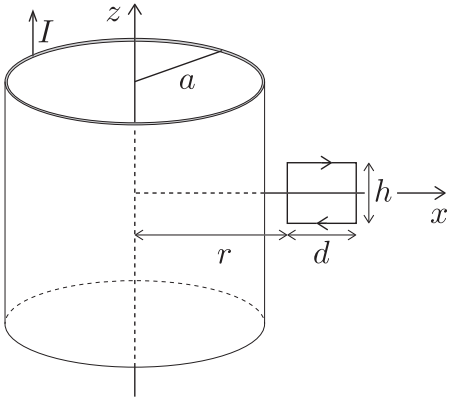
Solution. Vi ser at systemet har sylindersymmetri. Magnetfeltet kan derfor ikke avhenge av z eller ϕ i sylinderkoordinater. Magnetfeltet kan ikke ha en r-komponent, fordi da ville $\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ være forskjellig fra null. Magnetfeltet kan heller ikke ha en z-komponent fordi all strømmen er rettet i z-retningen. Magnetfeltet er derfor $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Vi velger en Ampere-sløyfe i form av en sirkel med radius r omkring z-aksen og anvender Amperes lov. Strømmen gjennom denne Ampere-sløyfen er I når $r > a$ og null når $r < a$. Amperes lov gir da at

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I$$

og dermed

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \, .$$

for $r > a$ og null for $r < a$.



b) Vi plasserer en rektangular krets i xz-planet som vist i figuren. Avstanden fra z-aksen til den innerste delen av den rektangulære kretsen er r. Hva er den gjensidige induktansen, $L(r)$, mellom den sylinderformede lederen og den rektangulære kretsen som funksjon av r. (Husk å finne induktansen også for $r < a$).

Solution. Vi finner fluksen fra magnetfeltet satt opp av strømmen I gjennom sylinderskallet. Den er avhengig av at den rektangulære kretsen er utenfor a. Fluksen blir

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_r^{r+d} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln((r+d)/r)$$

hvor vi har valgt positiv retning for den rektangular kresten i negativ ϕ-retning. Den gjensidige induktansen er derfor

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 h \ln((r+d)/r)}{2\pi}$$

Merk at hvis $r < a - d$ så er L null og hvis $a - d < r < a$ så er er $L = \frac{\mu_0 h \ln((r+d)/a)}{2\pi}$

Oppgave 5: Endelige plan

Vi skal i denne oppgaven studere et system som består av endelige, kvadratiske plan.

a) Vi ser først på ett enkelt uendelig plan i xy-planet med ladningstetthet ρ. Vis at det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z \hat{\mathbf{z}}$, hvor E_z er gitt som

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} .$$

Solution. Vi bruker Gauss lov med en Gaussflate i form av en sylinderflate med endeflate S og høyde h plassert symmetrisk om xy-planet. Vi ser av symmetrien til systemet at det elektriske feltet kun kan ha komponenter i z retningen og at det elektriske feltet kun kan avhenge av z: $\mathbf{E} = E_z(z)$. Det er da ingen fluks ut av den buede sylinderflaten fordi det elektriske feltet ikke har noen komponenter i xy-retningene. De to endeflatene bidrar hver med en fluks SE_z. Ladningen innenfor volumet er ρS. Gauss lov gir derfor

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E_z S = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho S}{\epsilon_0}$$

og dermed

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

Eksempel. Til hjelp får du oppgitt et program som finner det elektriske feltet fra en sirkel-formet ladning i xy-planet. Sirkelen har en ladning Q og en radius a og det brukes N punkter langs sirkelen til å finne feltet. Programmet finner det elektriske feltet i et punkt $\mathbf{r}$ og visualiserer feltet i xz-planet.

```
import numpy as np
import scipy.constants as sc
def Efrasirkel(r,a,Q,N):
    E = np.array([0,0,0])
    for i in range(N):
        thetai = i/N*2*np.pi
        Qi = Q/N
        ri = np.array([a*np.cos(thetai),a*np.sin(thetai),0])
        R = r - ri
        E = E + Qi/(4*np.pi*sc.epsilon_0)*R/np.linalg.norm(R)**3
    return E
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a, 2*a, 25, 25
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing="ij")
Ex = np.zeros_like(rx)
Ez = np.zeros_like(rz)
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Ex[ix,iz],Ey,Ez[ix,iz] = Efrasirkel(r,a,Q,N)
plt.quiver(rx,rz,Ex,Ez)
plt.xlabel("$x/a$"), plt.ylabel("$z/a$")
plt.axis("equal")
```

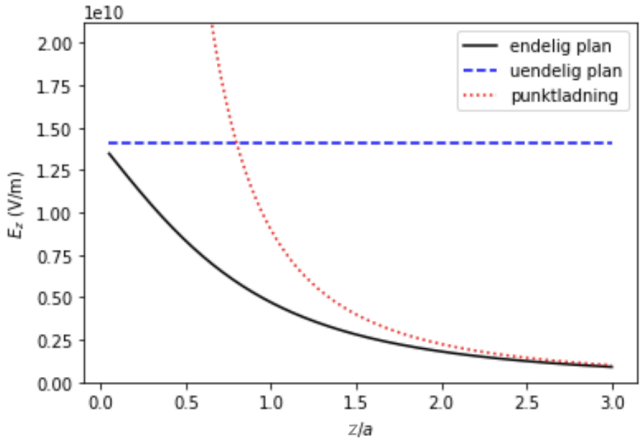
b) Vi skal nå se på et enkelt endelig plan som ligger parallelt med xy-planet og går gjennom punktet $(0, 0, z_0)$. Planet har dimensjoner $2a \times 2a$ og har en ladning Q. Du kan anta at planet er uendelig tynt og at systemet er i vakuum. Skriv en funksjon `Efraplan(r,z0,a,Q,Nx,Ny)` som finner det elektriske feltet fra det endelige planet i et punkt `r`. Du kan anta at du bruker `Nx*Ny` punkter til å beskrive planet.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# øLsning
def Efraplan(r,z0,a,Q,Nx,Ny):
    E = np.array([0,0,0])
    Qi = Q/(Nx*Ny)
    for ix in range(Nx):
        xi = -a+ix/Nx*2*a
        for iy in range(Ny):
            yi = -a+iy/Ny*2*a
            ri = np.array([xi,yi,z0])
            R = r - ri
            E = E + Qi/(4*np.pi*sc.epsilon_0)*R/np.linalg.norm(R)**3
    return E
```

c) Skriv et program for å sammenlikne det elektriske feltet fra programmet `Efraplan` med resultatet fra det uendelig store planet. Gjør sammenlikningen langs z-aksen. Programmet skal også sammenlikne med en punktladning med ladning Q i origo.

```
z_num = np.linspace(0.05*a,3*a,200)
Ez_num = np.zeros_like(z_num)
for i in range(len(z_num)):
    r = np.array([0,0,z_num[i]])
    Ex_tmp,Ey_tmp,Ez_num[i] = Efraplan(r,0.0,a,Q,N,N)
plt.plot(z_num,Ez_num,label="num")
Ez_teori = (Q/(2*a*2*a))/(2*sc.epsilon_0)
Ez_punkt = Q/(4*np.pi*sc.epsilon_0*z_num**2)
plt.plot(z_num,Ez_teori*np.ones(len(z_num)),label="teori")
plt.plot(z_num,Ez_punkt*np.ones(len(z_num)),label="punkt")
plt.ylim([0,np.max([Ez_num[0],Ez_teori*1.5])])
plt.xlabel("$x/a$"), plt.ylabel("$E_z$ (V/m)")
plt.legend()
```

d) Resultatet av programmet er vist i figuren. Kommenter resultatet kort.



Solution. Vi ser at resultatene sammenfaller svært nær planet. Det er kun i dette området at planet kan tilnærmes som et uendelig plan, så det er rimelig. Vekk fra planet faller det elektriske feltet fra det endelige planet, mens det elektriske feltet fra det uendelige planet er uniformt. Vi ser at lengre vekk fra det endelige planet oppfører feltet fra det endelige planet seg som feltet fra en punktladning, fordi et endelig plan vil se ut som en punktladning når man bare er tilstrekkelig langt unna.