UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Prøveeksamen 2025, 09:00 til 13:00

Oppgave 1: Ladninger

To ladninger ligger i vakuum. Ladningen $-Q$ ligger i punktet $(0, a, 0)$ og ladningen $+Q$ ligger i punktet $(0, -a, 0)$.

a) Hva blir det elektriske feltet i punktet $(0, 0, 0)$?

Solution. Vi bruker superposisjonsprinsippet og finner at

$$\mathbf{E}(0,0,0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} \tag{1}$$

Vi plasserer så ytterligere to ladninger i systemet. En ladning $-Q$ i punktet $(0, 2a, 0)$ og en ladning $+Q$ i punktet $(0, -2a, 0)$.

b) Hva blir nå det elektriske feltet i origo?

Solution. Det elektriske feltet blir nå

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2}\hat{\mathbf{y}} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\hat{\mathbf{y}}\,. \tag{2}$$

Vi plasserer så ytterligere ladninger ut slik at det er en ladning $+Q$ i alle punktene $(0, -ia, 0)$ og en ladning $-Q$ i alle punktene $(0, +ia, 0)$ hvor $i = 1, 2, 3, \ldots$. Det er altså uendelig mange ladninger.

c) Hva blir nå det elektriske feltet i origo.

Solution. Etter mønster fra forrige oppgave ser vi at det elektriske feltet blir

$$\mathbf{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\,. \tag{3}$$

Det er her tilstrekkelig å sette opp summen for å få 4. For å få 5 må man slå opp denne summen i Rothman. Da finner man at denne summen er $\pi^2/6$.

Oppgave 2: Kule med hull

En kule er laget av et materiale med uniform ladningstetthet ρ. Kulen har en radius a og er plassert med sentrum i origo. Systemet er i vakuum.

a) Hva er det elektriske feltet utenfor kulen?

Answer. $E_r = \rho a^3/(3\epsilon_0 r^2)$.

Solution. Vi bruker Gauss lov. Fordi systemet er kulesymmetrisk bruker vi kulekoordinator. Det elektriske feltet kan kun avhenge av avstanden r til sentrum. Det elektriske feltet kan også kun ha en radiell komponent pga kulesymmetrien, da en rotasjon av kulen må gi det samme feltet. Vi velger en Gauss flate som en kuleflate med radius r. Ladningen innenfor r blir da ladningen til hele kulen som er $Q = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho a^3$. Gauss lov gir da at

$$\oint_S E_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}\rho a^3 \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \, . \tag{4}$$

b) Hva er det elektriske feltet inne i kulen?

Answer. $E_r = \rho r/(3\epsilon_0)$

Solution. Inne i kulen kan vi bruke samme fremgangsmåte, men vi må ta hensyn til at ladningen innenfor r avhenger av r: $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ slik at

$$\oint_S E_r \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \, . \tag{5}$$

c) Vi lager så et kuleformet hull med radius $b < a$ og med sentrum i midten av kulen. Hva blir nå det elektriske feltet overalt i rommet?

Answer. $E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(a^3 - b^3)$ for $r > a$, $E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{r^3 - b^3}{r^2}$ for $b < r < a$ og $E_r = 0$ for $r < b$.

Solution. Utenfor kulen er det kun ladningen inne i kulen som er endret til $Q(a) = \frac{4\pi}{3}\rho(a^3 - b^3)$, slik at feltet her blir

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(a^3 - b^3) \, . \tag{6}$$

Inne i hullet, det vil si for $r < b$ vil det ikke være noen ladning innenfor Gauss-flaten, og det elektriske feltet blir null. I området $b < r < a$ så må vi nå bruke at $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho(r^3 - b^3)$. Det elektriske feltet i området $b < r < a$ blir derfor

$$E_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{r^3 - b^3}{r^2} \, . \tag{7}$$

Oppgave 3: Plane ladninger

Et system består av en tynn plate med areal A og ladning $2Q$ som ligger parallellt med xy-planet i $z = a$ og en tynn plate med areal A og ladning $-Q$ som ligger parallellt med xy-planet i $z = -a$. Systemet er i vakuum. Du kan anta at avstanden mellom platene er svært liten sammenliknet med utstrekningen av platene, slik at du kan se bort fra kanteffekter.

a) Hva er det elektriske feltet langs z-aksen?

Solution. Vi finner det elektriske feltet ved å finne det elektriske feltet fra en plate med ladning q i xy-planet og så summere effekten fra de to platene. For en plate med ladning q og areal A, kan vi anvende Gauss lov. Pga symmetri antar vi at feltet ikke avhenger av x eller y og at det ikke er noen x eller y komponent av det elektriske feltet. Feltet har derfor formen $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi forventer også at feltet er symmetrisk om planet, slik at $E_z(-z) = -E_z(z)$. Vi velger en Gauss-flate som f.eks. en sylinder med overflate S og som strekker seg fra $-z$ til z. Gauss lov gir da at

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E_z(z)S - (E_z(-z))S = 2E_z S = \frac{\rho_S S}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_z = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \,. \tag{8}$$

Her er $\rho_S = q/A$ slik at $E_z = (q/A)/(2\epsilon_0)$.

Vi bruker så superposisjonsprinsippet for å finne det elektriske feltet fra de to platene. For $z > a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = \frac{2Q/A}{2\epsilon_0} - \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = \frac{Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{9}$$

For $-a < z < a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = -\frac{2Q/A}{2\epsilon_0} - \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = -\frac{3Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{10}$$

Og for $z < -a$ blir det elektriske feltet

$$E_z = -\frac{2Q/A}{2\epsilon_0} + \frac{Q/A}{2\epsilon_0} = -\frac{Q/A}{2\epsilon_0} \,. \tag{11}$$

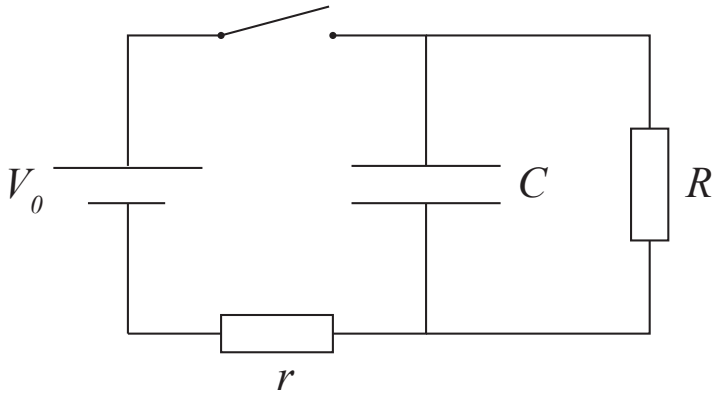
b) Hvis platen ved $z = -a$ har potensialet $V = 0$, hva er det potensialet til den øverste platen ved $z = a$?

Solution. Vi finner potensialet ved å integrere det elektriske feltet fra den nedre til en øvre platen

$$V(a) - V(-a) = V(a) - 0 = -\int_{-a}^{a} -\frac{3Q/A}{2\epsilon_0} \mathrm{d}z = \frac{3Q/A}{2\epsilon_0} 2a = \frac{3(Q/A)a}{\epsilon_0} \,. \tag{12}$$

Oppgave 4: Krets

Figuren viser en krets som består av et batteri, V_0, en bryter, en kondensator C og to motstander R og r.



a) Din venn Q sier at når bryteren er åpen som på figuren så kan det ikke gå noen strøm noe sted i kretsen. Har Q rett? Begrunn svaret ditt kort?

Answer. Nei.

Solution. Nei. Det kan fremdeles gå en strøm i den lukkede sløyfen som består av motstanden R og kondensatoren C. Dette kan f.eks. skje hvis kondensatoren er ladet opp når bryteren åpnes.

b) Anta at bryteren har vært åpen (slik at det ikke går noe strøm gjennom bryteren) i svært lang tid. Så lukker vi bryteren. Hva blir spenningen V_1 over kondensatoren når systemet har nådd en stasjonær tilstand?

Answer. $V_1 = V_0 R/(R+r)$

Solution. Når systemet har nådd en stasjonær tilstand vil kondensatoren ha ladet seg opp slik at det ikke lenger går noen strøm gjennom kondensatoren. Da går all strøm gjennom motstanden R. Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom batteriet, motstanden R og motstanden r gir da at

$$V_0 - IR - Ir = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V_0}{R+r} \, . \tag{13}$$

Spenningen over kondensatoren C må være den samme som spenningen over motstanden R, slik at

$$V_1 = IR = V_0 \frac{R}{R+r} \, . \tag{14}$$

c) Etter at systemet har nådd en stasjonær tilstand åpner vi bryteren (slik at det ikke går noen strøm gjennom bryteren). Hva er strømmen I_0 gjennom motstanden R umiddelbart etter at vi hår åpnet bryteren?

Answer. $I_0 = V_0/(r+R)$

Solution. Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom kondensatoren og motstanden R gir

$$V_C - I_0 R = 0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{V_C}{R} = \frac{V_0}{R+r} \, . \tag{15}$$

Hvor vi har satt inn at $V_C = V_1 = V_0 R/(r+R)$ umiddelbart etter at bryteren er åpnet.

d) Finn en differensiallikning som vi kan løse for å finne spenningen over kondensatoren som funksjon av tiden etter at bryteren ble åpnet. (Du behøver ikke løse denne differensiallikningen).

Answer. $dV/dt = -V/(RC)$

Solution. Vi vet at $C = Q/V$ slik at spenningen V over kondensatoren vil være $V = (1/C)Q$. Strømmen I gjennom motstanden R vil være $I = -dQ/dt$, hvor vi har valgt at I er positiv når det strømmer ladning ut av kondensatoren. Vi ser da at

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{C} I \, . \tag{16}$$

Vi kan finne I fra Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom kondensatoren og motstanden R:

$$V - IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{R} \, . \tag{17}$$

Tilsammen gir dette at

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C} I = -\frac{1}{RC} V \, . \tag{18}$$

Oppgave 5: Magnetisk felt i og rundt en kort solenoide

Vi skal i denne oppgaven studere det magnetiske feltet inne i og rundt en solenoide med strøm I og antall vindinger $M = 5$. Vi studerer først en enkelt sirkulær krets. Deretter setter vi sammen M kretser for å lage en modell for en solenoide.

a) En sirkulær krets med radius a ligger i xy-planet med sentrum i origo. Det går en strøm I gjennom kretsen i positiv rotasjonsretning. Vis at det magnetiske feltet i origo blir

$$\mathbf{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

Solution. Vi ser på et bidrag fra et strøm element $Id\mathbf{l}$ i posisjonen $\mathbf{r}'$. For dette elementet blir $\mathbf{R} = \mathbf{0} - \mathbf{r}' = -\mathbf{r}'$. Bidraget til det magnetiske feltet i origo blir da

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Her ser vi at $d\mathbf{l}$ og $\mathbf{R}$ står normalt på hverandre og kryssproduktet vil peke i z-retningen. Det gir

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IdlR}{R^3} \hat{z}$$

Vi ser at $R = a$ ikke endrer seg langs sirkelen. Vi summerer (integrerer) opp alle bidragene fra hele sirkelene som har en lengde $2\pi a$ og får

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi a^2}{a^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$$

Eksempel. Som hjelp til å løse oppgaven nedenfor kan du ta utgangspunkt i dette eksempelet.

Bidraget til det magnetiske feltet $d\mathbf{B}$ i punktet $\mathbf{r}$ fra et strømelement $I\Delta\mathbf{l}_i$ i punktet $\mathbf{r}_i$ er gitt av funksjonen `dBfield(r,ri,Idl)`

```
import numpy as np
def dBfield(r,ri,Idl):
    mu0 = 1.257e-6
    R = r - ri
    return mu0/(4*np.pi)*np.cross(Idl,R)/np.linalg.norm(R)**3
```

Det magnetiske feltet fra et strømelement Idl i origo rettet langs z-aksen kan visualiseres i xy-planet ved

```
import matplotlib.pyplot as plt
Idl = 1.0*np.array([0,0,1])
ri = np.array([0,0,0])
a = 0.1 # m
Lx, Ly, Nx, Ny = a,a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
y = np.linspace(-Ly,Ly,Ny)
rx,ry = np.meshgrid(x,y,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
By = np.zeros_like(ry)
for ix in range(Nx):
    for iy in range(Ny):
        r = np.array([rx[ix,iy],ry[ix,iy],0])
        Bx[ix,iy],By[ix,iy],Bz = dBfield(r,ri,Idl)
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,ry,Bx,By)
plt.xlabel("$x$ (m)"), plt.ylabel("$y$ (m)")
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,ry.T,Bx.T,By.T)
plt.xlabel("$x$ (m)"), plt.ylabel("$y$ (m)")
```

En sirkulær strømkrets. Vi ser først på et system som består av en sirkulær krets med strøm I og radius a som ligger i xy-planet med sentrum i origo.

b) Skriv en funksjon "'Bcircle(r,r0,a,I,N)"' som finner det magnetiske feltet $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ i punktet $\mathbf{r}$ fra en sirkelformet krets med en strøm I som har en radius a og ligger i et plan parallellt med xy-planet med sentrum i punktet $\mathbf{r}_0$. Her er N antall diskrete elementer som brukes til å beskrive sirkelen. Det er tilstrekkelig å bruke f.eks. $N = 100$.

```
import numpy as np
def Bcircle(r,r0,a,I,N):
    mu0 = 1.257e-6
    K = mu0/(4*np.pi)
    B = np.array([0,0,0])
    Idl = I*a*2*np.pi/N
    for j in range(N):
        theta = (j/N)*2*np.pi
        rj = r0 + np.array([a*np.cos(theta),a*np.sin(theta),0])
        dlvec = np.array([-np.sin(theta),np.cos(theta),0])
        R = r-rj
        dB = K*Idl*np.cross(dlvec,R)/np.linalg.norm(R)**3
        B = B + dB
    return B
```

c) Skriv et kort program som bruker funksjonen din til å sammenlikne resultatet fra funksjonen med det eksakte resultatet fra oppgave (a) ved å bruke $a = 0.1\text{m}$, $I = 1\text{A}$.

```
# Vi tester ved å sette r0 = (0,0,0)
r0 = np.array([0,0,0])
I = 1.0
a = 0.1
N = 10 # Det betyr ikke noe hva N er for denne spesielle utregningen
r = np.array([0,0,0])
Bnum = Bcircle(r,r0,a,I,N)
print("Numerisk = ",Bnum)
mu0 = 1.257e-6
Bexact = mu0*I/(2.0*a)*np.array([0,0,1])
print("Eksakt = ",Bexact)
```

En kort solenoide. Vi skal nå se på en kort solenoide som består av M sirkulære kretser som ligger i plan parallelle med xy-planet. De har radius a og sentrum på z-aksen. Kretsene er plassert ut slik at de er jevnt fordelt fra $z = a$ til $z = -a$. Den samme strømmen I går i positiv retning i alle de M kretsene.

d) Skriv en funksjon "'Bsolenoide(r,a,I,N,M)"' som finner det magnetiske feltet $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ fra en solenoide som beskrevet ovenfor og som består av M sirkulære kretser. Tallet N angir antall elementer som brukes til å beskrive hver enkelt sirkulære krets.

```
import numpy as np
def Bsolenoide(r,a,I,N,M):
    B = np.array([0,0,0])
    # Lag M æsirkulre østrmmer og summer bidragene
    for i in range(M):
```

```
        zi = -a + (2*a)/(M-1)*i
        r0 = np.array([0,0,zi])
        B = B + Bcircle(r,r0,a,I,N)
    return B
```

e) Bruk funksjonen "'Bsolenoide"' til å skrive et kort program som visualiserer det magnetiske feltet i xz-planet for $M = 5$. Velg et utsnitt som du tenker er passende. Fig. 1 viser det resulterende plottet fra et program som er skrevet riktig.

```
a = 0.1
I = 1.0
Lx, Lz, Nx, Nz = 2*a,2*a,20,20
x = np.linspace(-Lx,Lx,Nx)
z = np.linspace(-Lz,Lz,Nz)
rx,rz = np.meshgrid(x,z,indexing='ij')
Bx = np.zeros_like(rx)
Bz = np.zeros_like(rz)
r0 = np.array([0,0,0])
N = 100 # Antall elementer i hver krets
M = 5 # Antall æsirkulre kretser
for ix in range(Nx):
    for iz in range(Nz):
        r = np.array([rx[ix,iz],0,rz[ix,iz]])
        Bx[ix,iz],By,Bz[ix,iz] = Bsolenoide(r,a,I,N,M)

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.subplot(1,2,1)
plt.quiver(rx,rz,Bx,Bz)
plt.xlabel("$x$ (m)"), plt.ylabel("$z$ (m)")
plt.subplot(1,2,2)
plt.streamplot(rx.T,rz.T,Bx.T,Bz.T)
plt.xlabel("$x$ (m)")
```

f) Skriv et program som plotter det magnetiske feltet i z-retningen langs tre linjer som er parallelle med z-aksen, dvs. $B_z(0, 0, z)$, $B_z(a/3, 0, z)$ og $B_z(2a, 0, z)$, i området fra $z = -a$ til $z = a$. Du finner resultatet i Fig. 2. Kommenter resultatet. Stemmer dette med hva du forventer for en solenoide?

```
N = 100
a = 0.1
M = 5
Ni = 100
zp = np.linspace(-a,a,Ni)
Bz1 = np.zeros_like(zp)
```

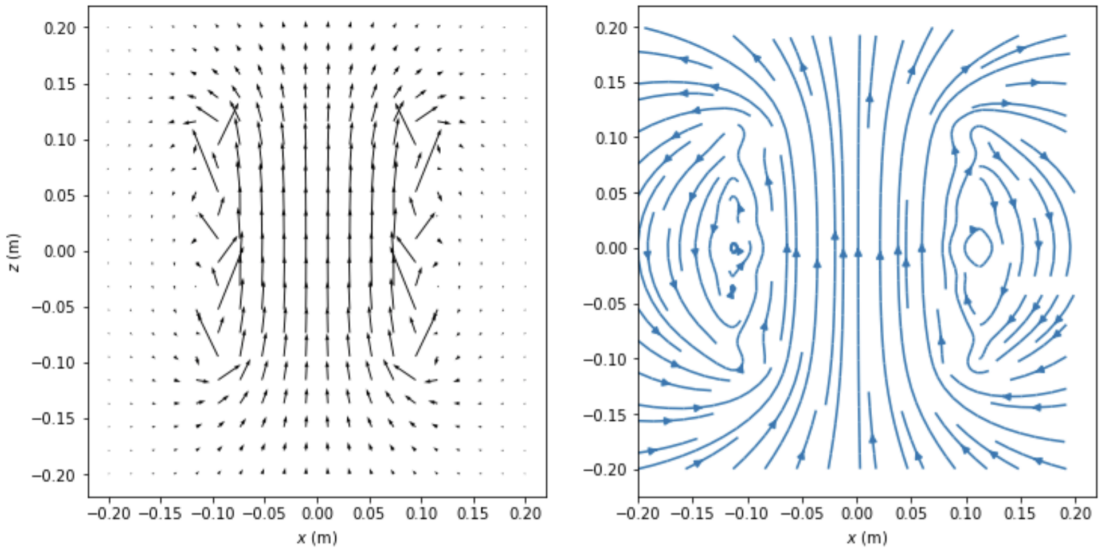


Figure 1: Plot av det magnetiske feltet fra en kort solenoide.

```
Bz2 = np.zeros_like(zp)
Bz3 = np.zeros_like(zp)
for i in range(Ni):
    zi = zp[i]
    r1 = np.array([0,0,zi])
    Bxi,Byz,Bzi = Bsolenoide(r1,a,I,N,M)
    Bz1[i] = Bzi
    r2 = np.array([a/2,0,zi])
    Bxi,Byz,Bzi = Bsolenoide(r2,a,I,N,M)
    Bz2[i] = Bzi
    r3 = np.array([2*a,0,zi])
    Bxi,Byz,Bzi = Bsolenoide(r3,a,I,N,M)
    Bz3[i] = Bzi
plt.plot(zp,Bz1,label="$B_z(0,0,z)$")
plt.plot(zp,Bz2,label="$B_z(a/2,0,z)$")
plt.plot(zp,Bz3,label="$B_z(2a,0,z)$")
plt.legend()
plt.xlabel("$z$ (m)"), plt.ylabel("$B_z$")
```

Vi forventer at det magnetiske feltet skal være uniformt inne i solenoiden og null på utsiden av solenoiden. Vi ser at det er liten forskjell mellom feltet i midten, dvs. $x = 0$, og langs linjen $x = a/3$. Det er som forventet. Vi ser at feltet på utsiden av solenoiden er mye mindre enn inne i solenoiden. Det går ikke helt til null, slik vi forventer for en uendelig lang solenoide. Det er ikke uventet siden solenoiden har en endelig lengde. Feltet utenfor peker i negativ z-retning som forventet.

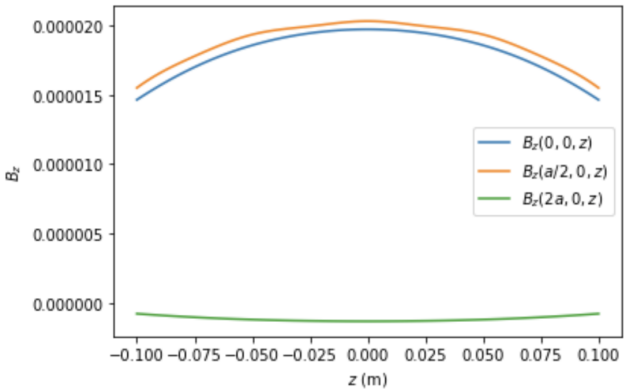


Figure 2: Plot av det magnetiske feltet fra en kort solenoide langs tre linjer.