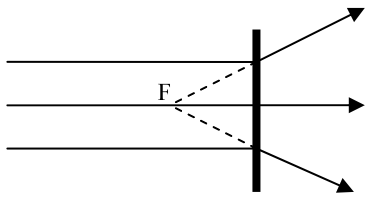
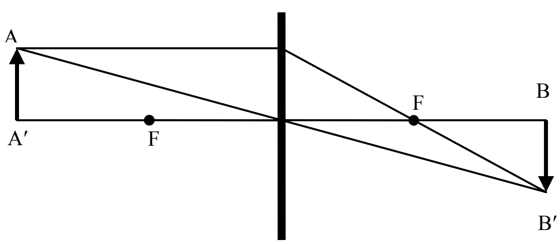
## Løsningsforslag eksamen i FY105 våren 2003

### Oppgave 1

**a)** Figuren under viser lysstråler som kommer fra et punkt i det uendelig fjerne og som avbildes i punktet F med en spredelinse. For en observatør på høyre siden av linsen ser det ut som om bildet kommer fra punktet F. Avbildningen i F er virtuell og kan ikke vises på en skjerm plassert gjennom F.




**b)** Bildeposisjonen, $s_2$, bestemmes av linseformelen. Fokallengden $f > 0$ siden linsen er konvergerende.



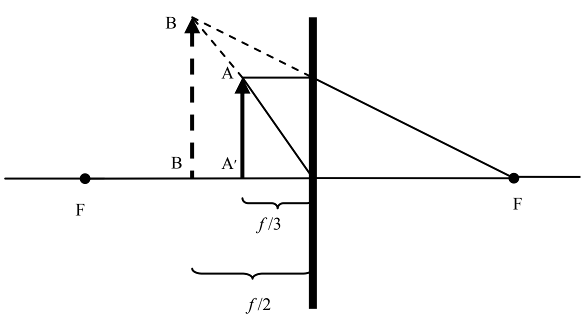

For $s_1 = 2f$ får vi $\frac{1}{2f} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$

som gir $s_2 = 2f$ .

Objektet AA′ avbildes i BB′ i avstand $\underline{\underline{s_2 = 2f}}$ fra linsen.

Bildeforstørrelsen er $m = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{2f}{2f} = \underline{\underline{-1}}$

Bildet er reelt siden $s_2 > 0$ .



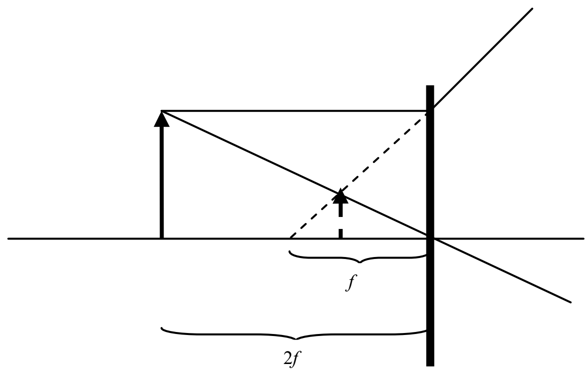

For $s_1 = f/3$ får vi $\frac{3}{f} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$

som gir $\underline{\underline{s_2 = -\frac{f}{2}}}$

$m = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{-f/2}{f/3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Bildet er virtuelt siden $s_2 < 0$

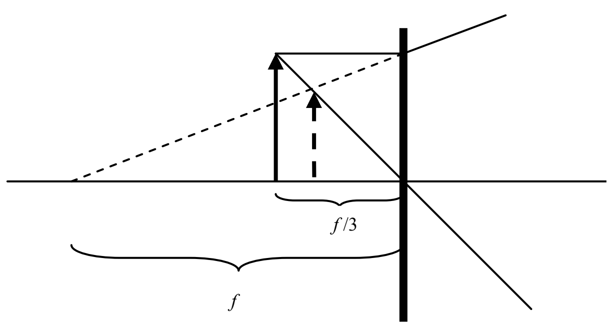
**c)** For en divergerende linse er linseformelen: $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{-f}$ der $f>0$




For $s_1 = 2f$ er $s_2 = \underline{\underline{-\frac{2f}{3}}}$.

Bildeforstørrelsen blir $m = -\frac{s_2}{s_1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Bildet er virtuelt ($s_2 < 0$).




For $s_1 = \frac{f}{3}$ er $s_2 = \underline{\underline{-\frac{f}{4}}}$.

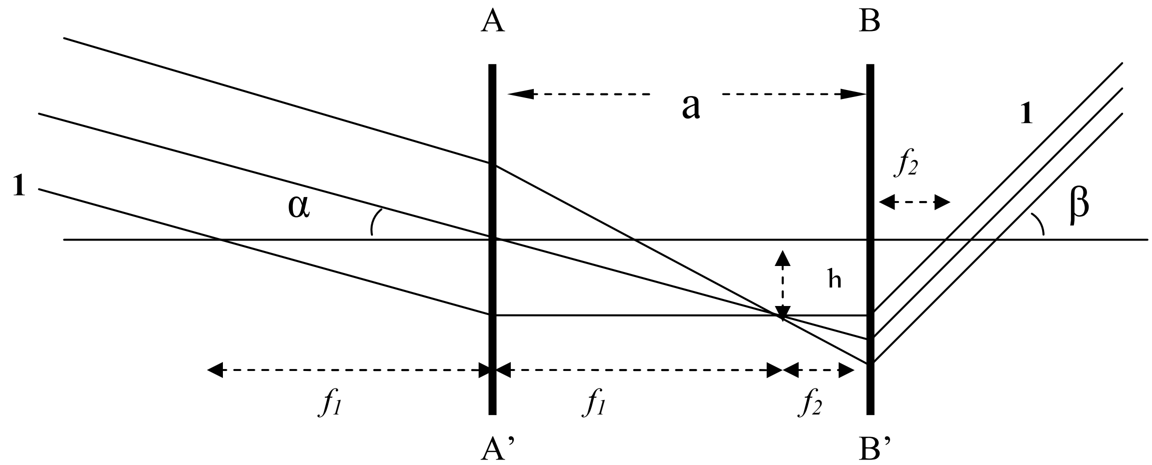
Bildeforstørrelsen blir $m = -\frac{s_2}{s_1} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

Bildet er viruelt ($s_2 < 0$).

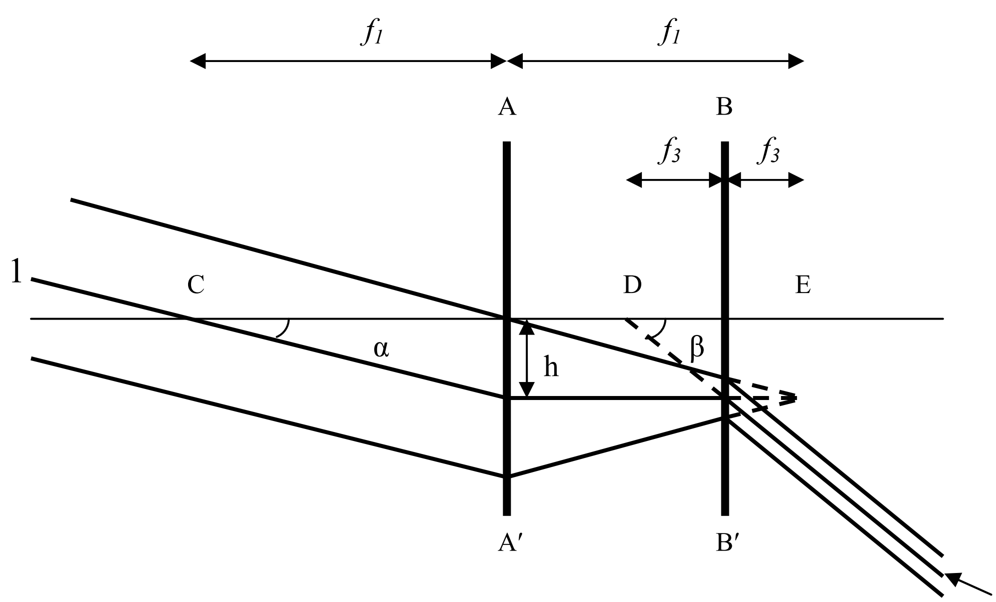
**d)** Parallelle stråler som faller på AA′ blir fokusert i forkalplanet for AA′. Skal strålene komm ut parallelt etter å ha pasert BB′ må AA′ og BB′ ha sammenfallende fokalplan. Dermed må $a = \underline{\underline{f_1 + f_2}}$.

Vi følger en stråle som går gjennom fokalpunktet til AA′ før strålebunten treffer AA′ (stråle 1 på figuren). Denne strålen vil være parallell med den optiske aksen mellom AA′ og BB′ og gå gjennom fokalpunktet til BB′ etter å ha passert BB′. Vi får når α og β er små:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{h}{f_1} \quad \text{og} \quad \beta \approx \tan\beta = \frac{h}{f_2} \quad \text{som gir} \quad \frac{\beta}{\alpha} \approx \underline{\underline{\frac{f_1}{f_2}}}$$




**e)** AA′ og BB′ må også nå ha felles fokalplan, men dette må nå ligge til høyre for BB′ siden BB′ er en spredelinse: $a = \underline{\underline{f_1 - f_3}}$. Vi følger stråle 1 på figuren under som går gjennom fokalpunktet C til AA′. Strålen er da parallell etter å ha passert AA′. Forlengelsen av stråle 1, etter at den har passert BB′ ,går gjennom D (fokalpunktet til BB′). Vinkelforstørrelsen blir: $\frac{\beta}{\alpha} \approx \underline{\underline{\frac{f_1}{f_3}}}$.



**Oppgave 2**

**a)** Kirchhoffs 2. regel gir

$$V(t) - RI - \frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

der I er strømmen i kretsen og q er ladningen på kondensatoren.
Derivasjon mhp tiden, t, gir:

$$-V_m\omega\sin\omega t - R\frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} - L\frac{d^2I}{dt^2} = 0$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -V_m\omega\sin\omega t \qquad (1)$$

dvs $\underline{\underline{a = L, \quad b = R, \quad c = \frac{1}{C}, \quad U(t) = -V_m\omega\sin\omega t}}$

**b)** Vi skriver *I*(*t*) på kompleks form:

$$I(t) = Ae^{\gamma t}e^{i(\omega t + \psi)} = Ae^{i\psi}e^{(i\omega+\gamma)t} \; .$$

Innsatt i (1) med $U(t) = 0$:

$$\left[L(i\omega+\gamma)^2 + R(i\omega+\gamma) + \frac{1}{C}\right]Ae^{i\psi}e^{(i\omega+\gamma)t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2L\omega\gamma + R\omega)i + (2\gamma L + R\gamma + \frac{1}{C} - \omega^2 L) = 0$$

Imaginær- og realdelen må hver for seg være lik null:

$$\underline{\underline{\gamma = -\frac{R}{2L}}} \qquad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}}$$

A og ψ er ubestemt og kan bestemmes ved grensebetingelser.

**c)**

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = Q_m \left( -\frac{R}{2L} \right) e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega t + \psi) - Q_m \omega e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \psi)$$

$$I(0) = -Q_m \frac{R}{2L} \cos\psi - Q_m \omega \sin\psi = 0$$

$$\psi = \arctan\left( \frac{-R}{2\omega L} \right)$$

$$q(0) = Q_m \cos\psi = Q\,, \quad \text{dvs} \quad Q_m = \frac{Q}{\cos\psi}$$

$$\underline{\underline{q(t) = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega t + \psi)}}\,, \quad \text{der} \quad \underline{\underline{\psi = \arctan\left( \frac{-R}{2\omega L} \right)}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{Q_m = \frac{Q}{\cos\psi}}}$$

**d)** $q(0) = Q_m \cos\psi = 0 \quad$ dvs $\quad \psi = \frac{\pi}{2}$

$$I(0) = Q_m \left( -\frac{R}{2L} \right) \cos\frac{\pi}{2} - Q_m \omega \sin\frac{\pi}{2} = I_0$$

$$Q_m = -\frac{I_0}{\omega}$$

$q(t)$ er nå som i c) men $\underline{\underline{\psi = \frac{\pi}{2}}}$ og $\underline{\underline{Q_m = -\frac{I_0}{\omega}}}$

**e)** Fra b) er $\quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Kritisk dempning er grensen mellom dempet svingebevegelse og ren dempning.

Vi får kritisk dempning når $\quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R = \sqrt{\frac{4L}{C}}}}$

**Oppgave 3**

**a)** S er strekk-krafetn i strengen og µ er masse per lengde, $\mu = m / L$. Newtons 1. lov på massen M gir: $S - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad S = Mg$

Fasehastigheten er $v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{MgL}{m}}}}$

**b)** Vi setter inn $y^+ = y_0^+ \sin(k\,x - \omega\,t)$ inn i bølgeligningen og får

$$-\omega^2 y_0^+ \sin(k\,x - \omega\,t) = -v^2 k^2 y_0^+ \sin(k\,x - \omega\,t)$$

$y^+$ er en løsning hvis fasehastigheten $v = \omega/k$ .

Hvis vi følger et punkt på bølgen er utslaget $y^+$ konstant. Da må argumentet til sinusfunksjonen være konstant: $k\,x - \omega\,t =$ konstant
derivasjon mhp t gir

$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$ som gir $\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} > 0$ som viser at bølgen beveger seg mot høyre.

Bølgelengden er $\lambda = \frac{v}{f} = \underline{\underline{\frac{1}{f}\sqrt{\frac{MgL}{m}}}}$

**c)** Den reflekterte bølgen kan skrives som $y^- = y_0^- \sin(k\,x + \omega\,t)$ .
Resultantbølgen er

$$y = y^+ + y^- = y_0^+ \sin(k\,x - \omega\,t) + y_0^- \sin(k\,x + \omega\,t)$$

siden strengen er festet i A (x = 0) er:

$y(0,t) = y_0^+ \sin \omega t - y_0^- \sin \omega t$ som gir $y_0^+ = y_0^- \equiv y_0$

$$y(x,t) = y_0 \sin kx \cos \omega t + y_0 \cos kx \sin \omega t + y_0 \sin kx \cos \omega t + y_0 \cos kx \sin \omega t = 2 y_0 \sin kx \cos \omega t$$

som er på formen $y = y_m \sin(\alpha\,x)\cos(\beta\,t)$ som beskriver en *stående bølge*. Hvert punkt på strengen svinger med konstant amplitude.

Strengen er fast i B:

$$y(L,t) = 2y_0 \sin kL \cos \omega t = 0$$

Da må $kL = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\underline{\underline{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3\ldots}}$$

Frekvensen er $f_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = \dfrac{n}{2L} \cdot \sqrt{\dfrac{MgL}{m}} = \underline{\underline{\sqrt{\dfrac{Mgn^2}{4mL}}}}$

**d)** Hvert punkt på strengen har bare vertikalbevegelse.

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -2y_0 \omega \sin kx \sin \omega t = \underline{\underline{-4\pi y_0 \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin 2\pi \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \cdot t}}$$

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -2y_0 \omega^2 \sin kx \cos \omega t = \underline{\underline{-8\pi^2 y_0 \frac{Mgn^2}{4mL} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos 2\pi \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \cdot t}}$$

**e)** Fasehastigheten som observatøren registrerer at bølgen har er $v-u$
Bølgelengden som observatøren registrerer, $\lambda'$, er uavhengig av $u$ ($\lambda' = \lambda$).

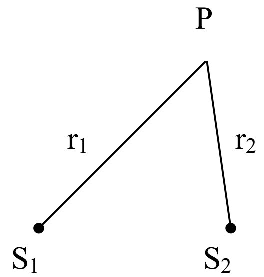
Observert frekvens er $f' = \dfrac{v-u}{v/f} = f\left(1 - \dfrac{u}{v}\right)$ der $f$ er bestemt i b)

Hvis observatøren beveger seg mot høyre er $\dfrac{v}{u} > 0$ og $f' < f$

Hvis observatøren beveger seg mot høyre er $\dfrac{v}{u} > 0$ og $f' > f$

**Oppgave 4**

**a)** Koherent lys er lysbølger med konstant faseforskjell.




Betingelsen for konstruktiv interferens er
$|r_1 - r_2| = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, ...$

Betingelsen for destruktiv interferens er
$|r_1 - r_2| = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, ...$

**b)** Parallelle stråler inn mot linsen vil avbildes i fokalplanet der skjermen er plassert. Betingelsen for at parallelle stråler med vinkel θ inn mot linsen skal fokuseres i x og interferere konstruktivt:

$a \sin\theta = n\lambda \quad n = 0, 1, 2...$ siden $x << f$ er $\theta \approx \sin\theta = \dfrac{x}{f}$

$a \cdot \dfrac{x}{f} = n\lambda \qquad \underline{\underline{x = n \cdot \left(\dfrac{f\lambda}{a}\right) \quad n = 0, 1, 2...}}$

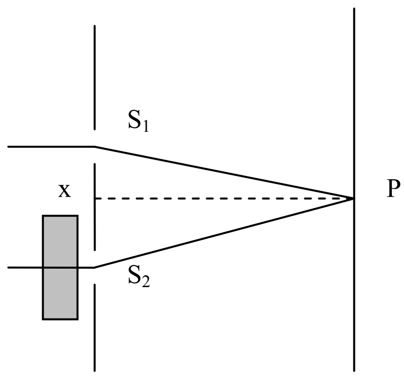
**c)** Hvis d er spalteavstanden er betingelsen for 2. ordens lysmaksimum $d \sin\theta = 2\lambda$. Hvis x er avstanden fra sentralmaksimum på skjermen til 2. ordens lysmaksimum og L er avstanden mellom dobbeltspaltene til skjermen kan dette skrives

$d \cdot \dfrac{x}{L} = 2\lambda$

For bølgelengdene $\lambda_1$ = 650 nm og den ukjente $\lambda_2$ kan vi sette opp uttrykket for den oppgitte differansen $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}$:

$d \cdot \dfrac{x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}}{L} = 2(\lambda_1 - \lambda_2)$ som gir $\lambda_2 = \lambda_1 - \dfrac{d \cdot (x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2})}{2L} = \underline{\underline{525\,nm}}$

**d)**




Skal vi få mørke i P må bølgene være i motfase i det de forlater $S_1$ og $S_2$. Bølgelengden i luft og i plast er forskjellig. Da er det mulig å tilpasse tykkelsen x slik at lysbølgene er i motfase når de når dobbeltspaltene. Antall bølgelengder over avstanden x i henholdsvis luft og plast er

$$\frac{x}{\lambda_{luft}} \quad \text{og} \quad \frac{x}{\lambda_{plast}}.$$

Betingelsen for destruktiv interferens i P er $\frac{x}{\lambda_{luft}} - \frac{x}{\lambda_{plast}} = \frac{1}{2}(2m+1) \qquad m = 0,1,2... \quad (1)$

Minst x-verdi fås med $m = 0$.

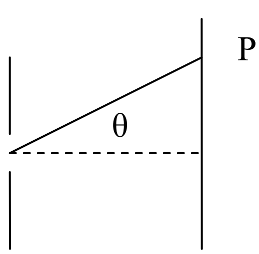
Brytningsindeksen i plast er n. $\quad n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_{luft} \cdot f}{\lambda_{plast} \cdot f} = \frac{\lambda_{luft}}{\lambda_{plast}}$ (frekvensen er den samme i begge medier)

$$\lambda_{plast} = \frac{\lambda_{luft}}{n}$$

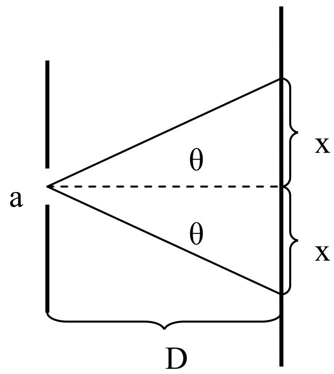
settes dette inn i (1) med $m = 0$ fås

$$x = \frac{\lambda}{2(n-1)} = \underline{\underline{0.567\ \mu m}}$$

**e)**




Vi kan betrakte enkeltspalten bestående av et stort antall spalter. Resultantbølgen i et punkt P på skjermen vil være et resultat av interferens mellom bølger fra enkeltspaltene. I bestemte posisjoner får vi konstruktiv interferens, og i andre destruktiv interferens.




Intensitetsfordelingen er gitt ved $I = I_M \dfrac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$

Første diffraksjonsminimum: $\beta = \pi$

$\dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}$

siden λ<< a er $\sin\theta \approx \dfrac{x}{D}$

Avstanden mellom de første diffraksjonsminima er

$2x = \quad a \quad = 7.6\,cm$

Retningen til første diffraksjonsminimum er gitt ved $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}$

$\sin\theta > 1$ er ikke mulig for noen θ. Dvs $\dfrac{\lambda}{a} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{a < \lambda}}$ gir ikke første ordens diffraksjonsminimum (og heller ikke høyere ordens minima).