

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FY 105 - Svingninger og bølger

Eksamensdag: 15. januar 2004

Tid for eksamen: Kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikken
Rottman: Matematisk formelsamling
To A4-ark med egne notater (kan skrives på begge sider)
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Oppgavesettet består av 5 oppgaver og er på 5 sider

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

Oppgave 1

a) En kloss med masse m er festet til en fjær og svinger frem og tilbake på et horisontalt friksjonsfritt underlag. Fjærens andre ende er fastspent. Fjæren har fjærstivhet k_1 og vi ser bort fra fjærens masse. Vis at differensialligningen for svingebevegelsen kan skrives på formen

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

og vis at

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

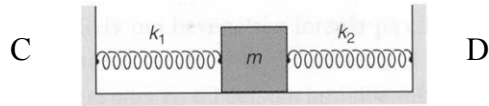
er en løsning av differensialligningen. t er tiden og A , ω og φ er konstanter.

Ved tiden $t=0$ er klossen i likevektsposisjonen ($x=0$) og hastigheten er $v=v_0$. Bestem konstantene A og φ .

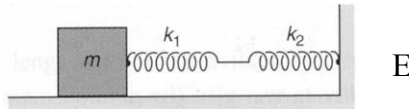
b) Sett opp et uttrykk for totalenergien til systemet.

c) Vi fester en annen fjær med fjærstivhet k_2 til klossen som vist i figuren øverst på neste side. Fjærene er festet i C og D. I likevektsstillingen for massen m er det ingen kraft fra hverken fjær 1 eller fjær 2. Vis at svingefrekvensen til klossen er

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



d) Vi fester nå fjærene til klossen som vist i figuren nedenfor. Systemet er festet i E. Bestem den effektive fjærstivheten k_{eff} , dvs den fjærstivheten en enkelt fjær må ha for å kunne erstatte de to fjærene.



e) Systemet i d) henges nå opp vertikalt. Sett opp differensialligningen for den vertikale svingebevegelsen og bestem frekvensen f' uttrykt ved k_1 , k_2 og m .

Oppgave 2

a) En plan elektromagnetisk bølge forplanter seg i vakuum parallelt med x -aksen og er gitt ved

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{j} \cos(kx - \omega t)$$

der \mathbf{j} er enhetsvektoren langs y -aksen. Sett opp uttrykket for det tilhørende \mathbf{B} -feltet når amplituden er B_0 . Bestem B_0 uttrykt ved E_0 , ω og k .

b) Bestem poyntingsvektoren og intensiteten for den elektromagnetiske bølgen i a).

c) I en elektromagnetisk plan bølge er \mathbf{E} - og \mathbf{B} -feltet gitt ved

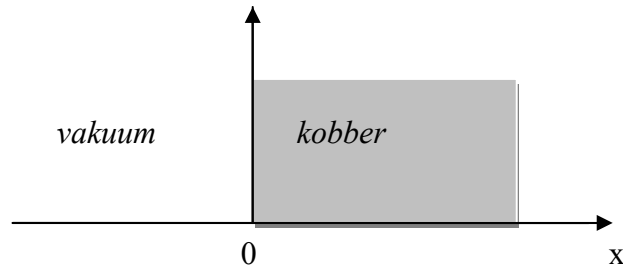
$$\mathbf{E} = (40.0\mathbf{i} + 16.0\mathbf{j} - 32.0\mathbf{k}) \cdot \cos(kx - \omega t) \frac{V}{m}$$

$$\mathbf{B} = (0.1\mathbf{i} + 0.08\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \cdot \cos(kx - \omega t) \mu T$$

Bestem konstanten a

d) Den elektromagnetiske bølgen i a) treffer en kobberplate i $x=0$ som vist i figuren på neste side. Platen står normalt på bølgens forplantningsretning. For $x>0$ kan \mathbf{E} -feltet uttrykkes ved

$$E = E_0 \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) e^{-\frac{x}{\delta}}$$



Hva kalles størrelsen δ ?

Bølgens frekvens for $x < 0$ (vakuum) er 50 Hz. Bestem δ og bølgens fasehastighet for $x > 0$.

Oppgitt: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$, $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$, $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$

e) Bestem x slik at bølgens intensitet er redusert til 2% av den verdien den har i vakuum.

Oppgave 3

a) Vi tar for oss en streng som er homogen. En bølgepuls forplanter seg langs strengen. Ved tiden $t = 0$ er utslaget gitt ved

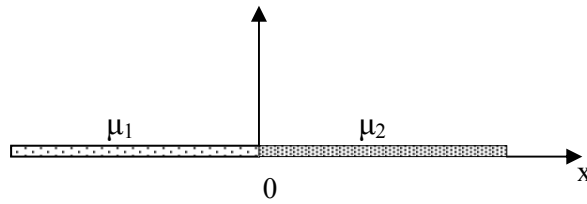
$$y(x,0) = \frac{a}{x^2 + b}$$

der a og b er reelle konstanter forskjellig fra 0. Bølgeshastigheten er 4.5 m/s. Bestem den rom- og tidsvarierende bølgefunksjonen $y(x,t)$. Hva er dimensjonen til a og b ?

b) En jevntykk snor med masse M og lengde L henger vertikalt. En transversell puls brer seg langs snoren. Vis at hastigheten til pulsen er gitt ved $v = \sqrt{gz}$, der z er avstanden fra den nedre del av snoren og g er tyngdeakselerasjonen. Bestem også tiden det tar for pulsen å bevege seg langs hele snorens lengde.

Oppgave 4

a) En streng er skjøtet sammen av to deler med masse pr lengde μ_1 og μ_2 . Skjøten er lagt i origo som vist på figuren på neste side. Strekket i strengen er S . En transversell harmonisk bølge med frekvens f_1 og bølgetall k_1 forplanter seg i positiv x -retning mot skjøten. Bestem fasehastighet, bølgelengde og frekvens til den reflektert og transmitterte bølge.



b) Det kan vises at amplituden til den transmitterte bølgen, y_{t0} , kan uttrykkes ved amplituden til den innkommende bølgen, y_{i0} :

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}$$

Bruk et kontinuitetskrav i $x=0$ til å vise at amplituden til den reflekterte bølge er

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}$$

c) I $x=0$ er utslaget til den innkommende og reflekterte bølge gitt ved

$$y_i(0, t) = -y_{i0} \sin(\omega t)$$

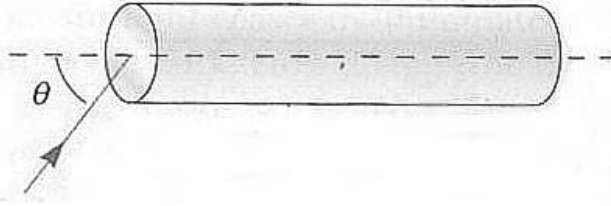
$$y_r(0, t) = y_{r0} \sin(\omega t)$$

Bruk dette og b) til å bestemme faseforskjellen mellom innkommende og reflektert bølge når $\mu_1 > \mu_2$ og $\mu_1 < \mu_2$.

Oppgave 5

a) En lysstråle kommer inn mot en grenseflate med innfallsvinkelen θ_1 fra et medium med brytningsindeks n_1 til et medium med brytningsindeks n_2 . Diskuter hva som skjer i grenseflaten når θ_1 varierer for tilfellene 1) $n_1 > n_2$ og 2) $n_1 < n_2$.

b) Figuren under viser en uendelig lang homogen sylinder med brytningsindeks $n=1.36$ omgitt av luft. Bestem innfallsvinkelen θ slik at lys som kommer inn i sylindere ikke slipper ut gjennom sylindere sideflate. Hvilken brytningsindeks må sylindermaterialet ha for at dette skal være tilfelle for alle innfallsvinkler, dvs $\theta < 90^\circ$.



c) Hvitt lys går gjennom et stykke glass og treffer en grenseflate mot luft med en brytningsvinkel θ . Brytningsindeksen til glasset øker med økende vinkelfrekvens og er gitt ved:

$$n^2 = 1 + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2 - C} \quad (1)$$

der $C = 529 \cdot 10^{30} \text{ rad}^2 / \text{s}^2$ og $\omega_0^2 = 685 \cdot 10^{30} \text{ rad}^2 / \text{s}^2$. Hva er den største vinkelfrekvensen som går gjennom grenseflaten og ut i luft?

d) Bestem innfallsvinkelen θ i c) slik at bare lys med bølgelengder $\lambda > 590 \text{ nm}$ (rødt lys) går gjennom grenselaget og ut i luft. Brytningsindeksen i glasset er fortsatt gitt ved (1).