

Løsningsforslag FY105-eksamen 15. januar 2004

Oppgave 1

a) Newtons 2.lov på klossen gir

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

med $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ får vi $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Innsatt $x(t)$ i differensialligningen:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = 0 \text{ som viser at } x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ er en løsning.}$$

Fra $x(t=0) = 0$ får vi:

$$A \sin \varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 0}}$$

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{\underline{\underline{\omega}}}$$

b) Totalenergien til systemet er $E_{total} = E_{kin,kloss} + E_{pot,kloss} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = konst$

I ytterstilling $x = \pm A$ er totalenergien i sin helhet lagret som potensiell energi i fjæren:

$$E_{total} = \frac{1}{2}kA^2$$

c) Kraft på klossen fra fjærene er F_1 fra fjær 1 og F_2 fra fjær2.
Newtons 2.lov på m:

$$F_1 + F_2 = m\ddot{x}$$

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

Vinkelfrekvensen er dermed

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \text{ og frekvensen er } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

d) Når massen m forskyves fra likevektsstillingen forlenges fjær 1 x_1 og fjær 2 x_2 .

Kreftene som forlenger fjærene er like: $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$

Erstatningsfjæren forlenges $x = x_1 + x_2$.

Fra Hooks lov ($F = -kx$) får vi $\frac{-F}{k_{eff}} = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eff} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

e) Hvis x er utslaget fra ustrukket fjær får vi med Newtons 2. lov på massen m :

$$-k_{eff}x + mg = m\ddot{x} \Rightarrow$$

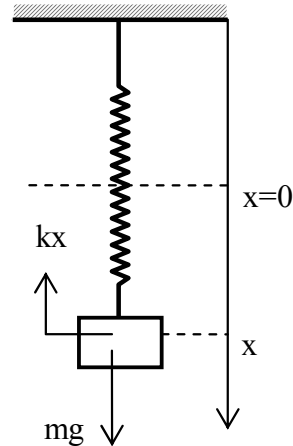
$$\ddot{x} + \frac{k_{eff}}{m}(x - \frac{mg}{k_{eff}}) = 0$$

Vi innfører variabelen $y = x - \frac{mg}{k_{eff}}$

Dette gir

$$\ddot{y} + \frac{k_{eff}}{m}y = 0 \text{ som er differensialligningen for}$$

harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$



$$\text{Frekvensen er } f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

Oppgave 2

a) \mathbf{B} står normalt på \mathbf{E} og er rettet langs z -aksen slik at $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ peker i bevegelsesretningen x : $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} \cos(kx - \omega t)$

$$\text{Sammenhengen mellom } B_0 \text{ og } E_0 \text{ er: } B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\text{Dessuten er } c = \frac{\omega}{k} \text{ og vi får } B_0 = \frac{E_0 k}{\omega}$$

$$\text{b) Poyntingsvektoren er: } \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{E_0^2 k}{\mu_0 c \omega} \cos^2(kx - \omega t) \mathbf{i}$$

Intensiteten er tidsmiddelet av poyntingsvektoren:

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 k}{\mu_0 c \omega} \text{ der vi har benyttet at } \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

c) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ og da må skalarproduktet $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, som gir $a = 0.165$

d) δ er skinndybden og er den inntrengningsdybden der amplituden til E-feltet er redusert med faktoren $\frac{1}{e}$.

Frekvensen endres ikke når bølgen trenger inn i kobberet. Skinndybden

$$\text{er } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma 2\pi f}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7} 2\pi \cdot 50}} m = \underline{\underline{9.3\text{mm}}}$$

e) Intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden til E-feltet: $I \sim (E_0 e^{-\frac{x}{\delta}})^2$

Forholdet mellom intensiteten i x og intensiteten i vakuum er da:

$$\frac{E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}}{E_0^2} = 0.02 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1.8\text{cm}}}$$

Oppgave 3

a) Bølgen må være på formen $y(x-vt)$. Bølgefunksjonen kan da skrives som

$$y(x,t) = \frac{a}{(x-vt)^2 + b} \text{ der } v \text{ er bølgehastigheten. Siden } v = 4.5 \text{ m/s er:}$$

$$\underline{\underline{y(x,t) = \frac{a}{(x - 4.5 \frac{m}{s} t)^2 + b}}}$$

$(x - 4.5 \frac{m}{s} t)^2$ har dimensjonen (lengde)². Da må b også ha dimensjon (lengde)². Siden y har dimensjon lengde må a ha dimensjon (lengde)³.

b)

Newtons 1. lov mellom 0 og z gir (se figuren):

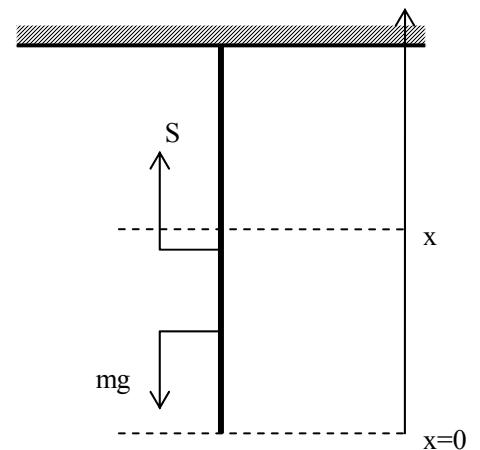
$$S - m_z g = 0, \text{ der } m_z \text{ er massen av snoren mellom 0 og } z.$$

$$\text{Siden snoren er jevntykk er: } \frac{m_z}{M} = \frac{z}{L} \Rightarrow m_z = \frac{zM}{L}.$$

Innsatt i ligningen over (Newtons 1. lov) gir

$$S = \frac{zMg}{L} = z\mu g. \text{ Pulsens hastighet er } v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{z\mu g}{\mu}} = \underline{\underline{\sqrt{zg}}}$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \sqrt{zg} \Rightarrow dt = \frac{dz}{\sqrt{zg}}$$



Vi integrerer over hele snorens lengde:

$$\int_0^t dt = \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{zg}}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Oppgave 4

a) Fasehastigheten til den reflekterte bølge, v_r , og den transmitterte bølge, v_t , er:

$$v_r = \sqrt{\frac{S}{\mu_1}}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{S}{\mu_2}}$$

Frekvensen er den samme i medium 1 og i medium 2: $f_r = f_t = f_1$.

$$\lambda_r = \frac{v_r}{f_1} = \frac{1}{f_1} \sqrt{\frac{S}{\mu_1}}$$

$$\lambda_t = \frac{v_t}{f_1} = \frac{1}{f_1} \sqrt{\frac{S}{\mu_2}}$$

b) De tre bølgene kan skrives som

$$y_i(x, t) = y_{i0} \sin(k_1 x - \omega_i t)$$

$$y_r(x, t) = y_{r0} \sin(k_1 x + \omega_i t)$$

$$y_t(x, t) = y_{t0} \sin(k_2 x - \omega_i t)$$

Kontinuitetskrav i skjøtepunktet $x=0$:

$$y_i(x, 0) + y_r(x, 0) = y_t(x, 0)$$

$$y_{i0} \sin(-\omega_i t) + y_{r0} \sin(\omega_i t) = y_{t0} \sin(-\omega_i t)$$

$$-y_{i0} \sin(\omega_i t) + y_{r0} \sin(\omega_i t) = -y_{t0} \sin(\omega_i t)$$

Dette skal gjelde for alle t og vi får:

$$-y_{i0} + y_{r0} = -y_{i0}$$

Vi setter inn for y_{i0} og får:

$$y_{r0} = y_{i0} - y_{i0} = \left(1 - \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\right)y_{i0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}$$

c)

$$y_i(0,t) = -y_{i0} \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$y_r(0,t) = y_{r0} \sin(\omega t) \quad (2)$$

$\mu_1 > \mu_2$:

Fra b) har vi at y_{r0} og y_{i0} har motsatt fortegn. Sammenligninger vi (1) og (2) ser vi at $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ har samme fortegn. $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ er i fase.

$\mu_1 < \mu_2$:

Fra b) har vi at y_{r0} og y_{i0} har samme fortegn. Sammenligninger vi (1) og (2) ser vi at $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ har motsatt fortegn. $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ er i motfase.

Oppgave 5

a) Snells brytningslov gir: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$, der θ_2 er

brytningsvinkelen i medium 2.

I grenseflaten får vi i begge tilfeller en reflektert stråle tilbake i medium 1 med refleksjonsvinkel = θ_1 .

$n_2 > n_1$:

Fra Snells brytningslov ser vi at $\theta_2 < \theta_1$. Når θ_1 varierer fra 0 til $\frac{\pi}{2}$ vil θ_2 variere fra 0 til

$$\arcsin \frac{n_1}{n_2}.$$

$n_2 < n_1$:

Fra Snells brytningslov ser vi at $\theta_2 > \theta_1$. $\sin \theta_2 = 1$ er maksimalverdien for $\sin \theta_2$. Dette inntreffer når $\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$ og kalles den kritiske vinkel, θ_c . Når θ_1 varierer fra 0 til θ_c vil θ_2 variere fra 0 til $\frac{\pi}{2}$. Når $\theta_1 > \theta_c$ vil ingen stråling trenge inn i medium 2 og vi får totalrefleksjon.

b)

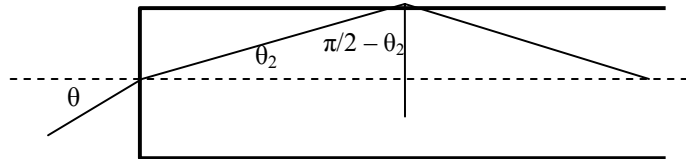
Betingelsen for totalrefleksjon når strålen treffer sylindereens sideflate:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \theta_2) &= \frac{1}{n} \\ \cos \theta_2 &= \frac{1}{n} \quad (2) \\ \Rightarrow \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta_c = 42.66^\circ \end{aligned}$$

Vi anvender Snells lov på strålen som brytes første gang i sylindereens endeflate. Luft har brytningsindeks $n \approx 1$.

$$1 \cdot \sin \theta = n \cdot \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$\text{Innsatt for } \theta_2 \text{ og } n \Rightarrow \theta = \underline{\underline{67.2^\circ}}$$



Med $\theta = 90^\circ$ får vi fra (3)

$$1 = n \cdot \sin \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\text{Innsatt i 2: } \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Hvis $\theta < 90^\circ$ blir $90^\circ - \theta_2 > \theta_c$. Dermed får vi totalrefleksjon i sideflaten for alle $\theta < 90^\circ$ hvis $\underline{\underline{n > \sqrt{2}}}$

c) Nevneren i (1) må være > 0 :

$$\omega_0^2 - \omega^2 - C > 0$$

$$\omega < \sqrt{\omega_0^2 - C}$$

$$\underline{\underline{\omega < 1.25 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}}}$$

d) Hvis $\theta > \theta_c$ får vi totalrefleksjon. Siden brytningsindeksen, n , er en funksjon av ω er

$$\sin \theta_c = \frac{1}{n(\omega)}$$

$$\sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2 - C}}}$$

Hvis c er lyshastigheten i luft er

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Innsatt i uttrykket for $\sin \theta_c$ over:

$$\sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C}{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 - C}}}$$

der λ er lysets bølgelengde i luft. For $\lambda=590\text{nm}$ er $\theta_c=27.7^\circ$.

Vi ser at θ_c avtar med λ . Dermed vil alle $\lambda < 590\text{nm}$ bli totalreflektert og bare lys med $\lambda > 590\text{nm}$ går gjennom grenselaget og ut i luft.