FYS2130. Tillegg til kapittel 13

Harmonisk oscillator. Løsning med komplekse tall

Differensialligningen for en udempet harmonisk oscillator er

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

som er en homogen lineær differensialligning av 2. orden. Vi forsøker med en løsning på formen $x(t) = De^{\alpha t}$. Dette gir

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0$$

$$\alpha = \pm i\omega$$

der $i^2 = -1$

Den generelle løsningen av (1) kan skrives som en linærkombinasjon av to lineært uavhengige løsninger:

$$x(t) = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}$$

der D_1 og D_2 er konstanter.

Vi setter

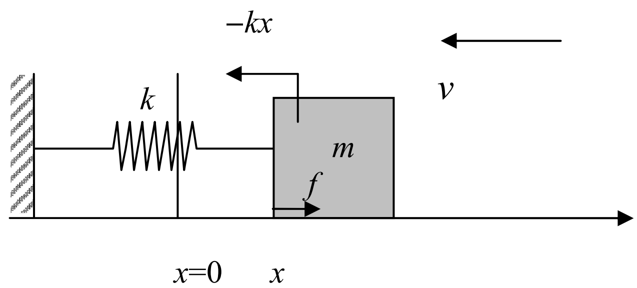
$$D_1 = \frac{A}{2i} e^{i\varphi}$$
$$D_2 = -\frac{A}{2i} e^{-i\varphi}$$

Vha. Eulers formel, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (Se for eksempel Rottmann) , får vi

$$x(t) = \frac{A}{2i} e^{i(\omega t + \varphi)} - \frac{A}{2i} e^{-i(\omega t + \varphi)} = A\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2i} = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

Dempede svingninger

I praksis er alle svingesystemer mer eller mindre dempet. Vi betrakter vårt vanlige eksempel med en fjær med fjærstivhet k som er fastspent i den ene enden. Den andre enden er festet til en masse som kan gli friksjonsfritt på et underlag. Vi antar at oscillatoren er omgitt av væske eller gass og svingningene vil derfor være dempet.



Figur1: Eksempel på dempet harmonisk oscillator. Her beveger massen seg mot venstre og den dempende kraften f er rettet mot høyre.

I tillegg til kraft fra fjæren er massen m påvirket av en dempende kraft, f, som virker mot bevegelsesretningen. Hvis m beveger seg mot venstre vil f være rettet mot høyre som vist på figuren over. Videre antar vi at den dempende kraften er proporsjonal med hastigheten til m.

Vi setter

$$f = -b \cdot v = -b \cdot \dot{x}$$

Dette er en god approksimasjon for bevegelse i væske eller gass hvis hastigheten v ikke er for stor. b er dempningskonstanten som beskriver graden av dempningen. Merk at uttrykket over krever at $b > 0$ siden den dempende kraften er rettet mot bevegelsesretningen.

Newtons 2. lov på massen m gir:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (3)$$

Som for tilfellet med ren harmonisk oscillator uten dempning foreslår vi at løsningen kan skrives på formen

$$x(t) = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

Innsatt i (3) får vi

$$C\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{b}{m} C\alpha\, e^{\alpha t} + \frac{k}{m} C e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

Som gir følgende to løsninger:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Den generelle løsning av den lineære 2. ordens differensialligningen (3) er en lineærkombinasjon av to lineært uavhengige løsninger:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[C_1 e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \cdot t} \right] \qquad (4)$$

Svingeforløpet *x(t)* avhenger av verdien på *k, m* og *b*. Vi skal se på tre tilfeller som dekker alle mulig svingeforløp. Konstantene C_1 og C_2 kan bestemmes hvis vi f.eks kjenner utslaget *x(t)* og hastigheten $v(t) = \dot{x}(t)$ for et bestemt tidspunkt, f.eks. $t = 0$.

1) *Overkritisk dempning* $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ dvs. $b > 2\sqrt{k\,m}$

Radikandene i (4) er nå positive. Da er α_1 og α_2 i (4) begge negative reelle tall og vi får et eksponentielt avtagende forløp. I dette tilfelle er dempningskonstant *b* så stor at svingningene ikke kommer i gang.

2) *Underkritisk dempning* $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ dvs. $b < 2\sqrt{k\,m}$

Vi omskriver (4) :

$$x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left[C_1 e^{\sqrt{-\left[\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}\cdot t}+C_2 e^{-\sqrt{-\left[\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}\cdot t}\right]=e^{-\frac{b}{2m}t}\left[C_1 e^{i\sqrt{\left[\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}\cdot t}+C_2 e^{-i\sqrt{\left[\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}\cdot t}\right]=$$

$$Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega_d t+\varphi)$$

Der vi i siste overgang har benyttet resultatet for udempet harmonisk oscillator, ligning (2), og $\omega_d=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

Vi får nå et oscillerende forløp med vinkelfrekvens ω_d og med en amplitude $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ som dermed avtar eksponentielt med tiden. Legg merke til at ω_d er mindre enn den naturlige vinkelfrekvens ω (harmonisk oscillator uten dempning).

3) *Kritisk dempning* $\left(\frac{b}{2m}\right)^2=\frac{k}{m}$ dvs. $b=2\sqrt{k\,m}$

Dette gir $\alpha=-\frac{b}{2m}$

Siden den generelle løsningen av differensialligningen skrives som en lineærkombinasjon av to uavhengige løsninger, trenger vi en α-verdi til.

Vi benytter en metode som kalles reduksjon av orden. Vi forsøker med en prøveløsning på formen

$$x(t)=f(t)\cdot e^{\alpha t}$$

hvor vi ønsker å bestemme *f(t)*. Differensialligningen (3) kan i dette tilfellet skrives

$$\ddot{x}-2\alpha\dot{x}+\alpha^2x=0$$

der vi har benyttet at $\alpha^2=\frac{k}{m}$

som gir

$$\begin{aligned}\ddot{f}&=0\\ \dot{f}&=C_1\\ f(t)&=C_2+C_1\cdot t\end{aligned}$$

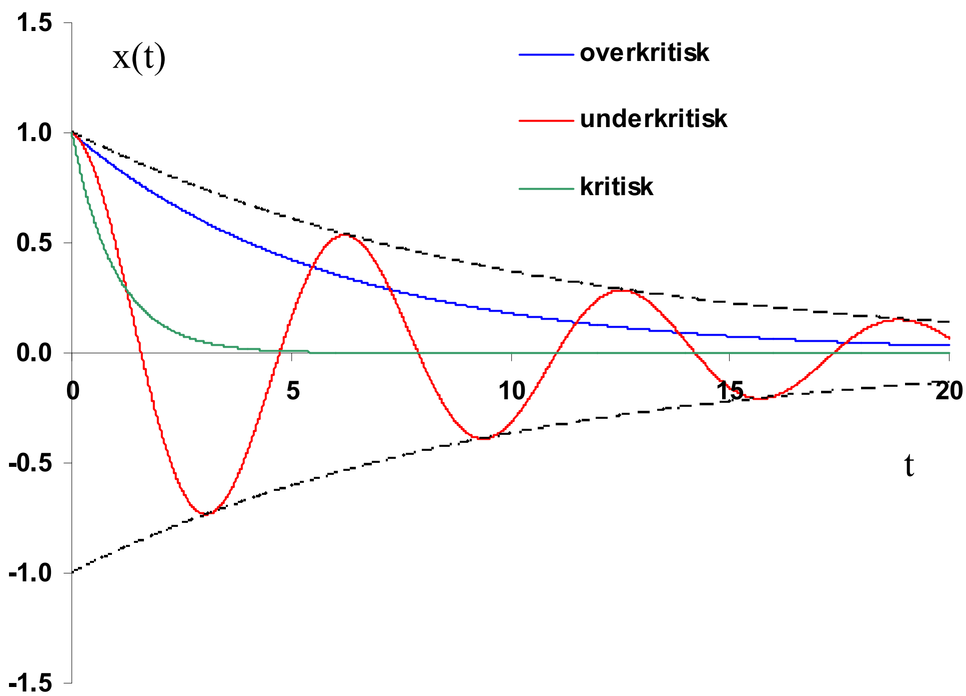
Der C_1 og C_2 er konstanter.

Den generelle løsningen kan da skrives

$$x(t) = (C_2 + C_1 \cdot t)e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Vi får også nå et eksponentielt avtagende forløp. Denne løsningen beskriver grensen mellom et ikke-svingende og et svingende forløp.

Figur 3 viser utslaget *x(t)* som funksjon av tiden *t* for overkritisk, kritisk og underkritisk dempning.

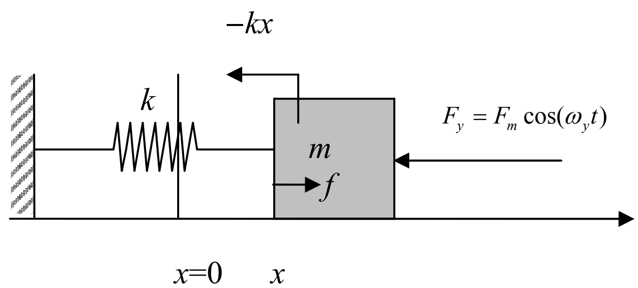


Figur 3: Eksempel på overkritisk, kritisk og underkritisk dempning. I dette eksempelet er utslaget $x(t=0)=1$ og hastigheten $v(t=0)=\dot{x}(t=0)=0$. Stiplete kurver viser forløpet av $A\mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}\cdot t}$ for underkritisk dempning.

Tvungne svingninger

Vi vil nå inkludere en ytre kraft, F_y, på systemet. Vi lar denne ytre kraften variere harmonisk med vinkelfrekvens ω_y og amplitude F_m:

$$F_y = F_m \cos(\omega_y t)$$



Figur 2: Tvungne svingninger. Massen m er i tillegg til kraft fra fjær og en dempende kraft påvirket av en harmonisk varierende kraft F_y. På figuren beveger massen seg mot venstre, slik at den dempende kraften f er rettet mot høyre.

Newtons 2. lov gir nå:

$$F_m \cos(\omega_y t) - kx - b\dot{x} = m\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_m \cos(\omega_y t) \qquad (5)$$

(5) er en **<u>in</u>**homogen lineær differensialligning av 2. orden. Den skiller seg matematisk fra differensialligningen vi hadde i forrige avsnitt ved at den har et ledd som er forskjellig fra null på høyre side av ligningen. (3) er en homogen lineær differensialligning.

Den generelle løsningen for den inhomogene differensialligningen (5) kan skrives som

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

Der $x_H(t)$ er den generelle løsningen av den homogene differensialligningen og $x_P(t)$ er en spesiell løsning (partikulærløsning) av den inhomogene differensialligningen.

$x_H(t)$ har vi funnet tidligere (ligning 4). Den har et eksponentielt avtagende forløp og vil dermed være neglisjerbar bare vi venter lenge nok. Vi er interessert i hvordan systemet svinger etter at det har stabilisert seg slik at vi kan sette $x(t) \approx x_P(t)$.

Med kompleks notasjon kan vi skrive den oscillerende ytre kraften som

$$F_y = \mathrm{Re}(F_m e^{i\omega_y t}) = F_m \cos(\omega_y t)$$

siden $\mathrm{Re}(F_m e^{i\omega_y t}) = \mathrm{Re}\left\{F_m \left(\cos(\omega_y t) + i\sin(\omega_y t)\right)\right\} = F_m \cos(\omega_y t)$

Vi skriver (5) på den komplekse formen:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_m e^{i\omega_y t} \tag{6}$$

Vi forsøker med en prøveløsning på formen

$$x(t) = De^{i\omega_y t}$$

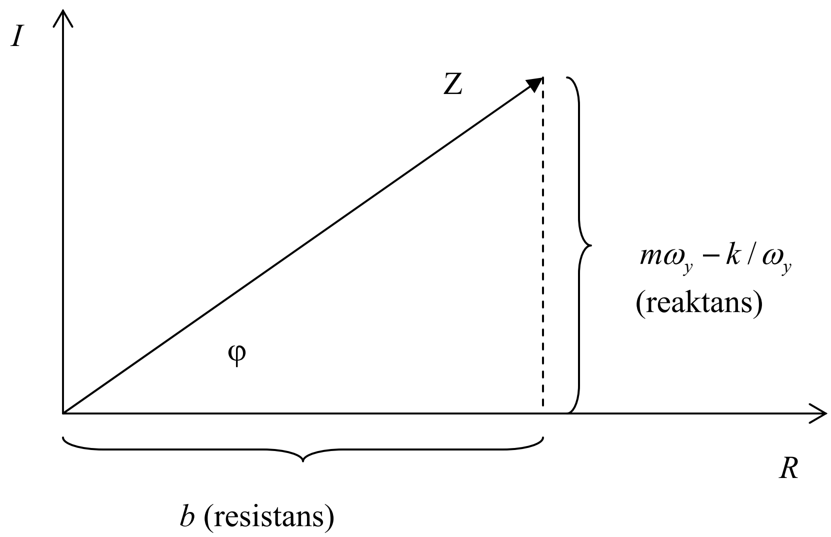
Ved å sette denne inn i (6) får vi:

$$-\omega_y^2 Dme^{i\omega_y t} + ibD\omega_y e^{i\omega_y t} + kDe^{i\omega_y t} = F_m e^{i\omega_y t}$$

$$D = \frac{F_m}{i\omega_y \left[b + i(m\omega_y - \frac{k}{\omega_y}) \right]} = \frac{F_m}{i\omega_y Z} \tag{7}$$

Z er den **mekaniske impedans** og er generelt et komplekst tall. Den mekaniske impedans spiller tilsvarende rolle som impedans i en vekselstrømskrets.

Vi kan fremstille *Z* i det komplekse plan:



Figur 3: Svingesystemets mekaniske impedans fremstilt i det komplekse plan. Impedansens reelle del kalles resistans og den imaginære del kalles reaktans.

Impedansmodulen Z_0 er

$$Z_0 = |Z| = \sqrt{b^2 + (m\omega_y - \frac{k}{\omega_y})^2}$$

Den mekaniske impedansen kan også skrives på formen

$$Z = Z_0\, \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Fra Figur 3 ser vi at

$$\tan\varphi = \frac{m\omega_y - \frac{k}{\omega_y}}{b}$$

Vi finner et uttrykk for størrelsen *D* i prøveløsningen (7):

$$D = \frac{F_m}{i\omega_y Z} = \frac{F_m}{i\omega_y Z_0 e^{i\varphi}} = \frac{F_m}{e^{i\frac{\pi}{2}}\omega_y Z_0 e^{i\varphi}} = \frac{F_m}{\omega_y Z_0} e^{i(-\frac{\pi}{2} - \varphi)}$$

Den komplekse løsning av (6) er

$$De^{i\omega_y t} = \frac{F_m}{\omega_y Z_0} e^{(\omega_y t - \varphi - \pi/2)i}$$

Løsningen vi er på jakt etter er realdelen av uttrykket over:

$$x(t) = \frac{F_m}{\omega_y Z_0}\cos(\omega_y t - \varphi - \pi/2) = \frac{F_m}{\omega_y Z_0}\sin(\omega_y t - \varphi) = A\sin(\omega_y t - \varphi)$$

Amplituden til de tvungne svingningene er dermed

$$A = \frac{F_m}{\omega_y Z_0} = \frac{F_m}{\sqrt{b^2\omega_y^2 + (m\omega_y^2 - k)^2}} \tag{8}$$

Amplituden avhenger blant annet av dempningskonstanten b og av vinkelfrekvensen til den ytre oscillerende kraften, ω_y. Uten dempning (b = 0) vil amplituden $A \rightarrow \infty$ når $\omega_y \rightarrow \sqrt{k/m} = \omega$ (den naturlige vinkelfrekvensen for systemet). Systemet er da i **resonans**. I virkeligheten vil alle svingesystemer være dempet. Vi ønsker å bestemme den maksimale amplituden og for hvilken vinkelfrekvens, ω_y, dette inntreffer.

Amplituden A har maksimalverdi når radikanden i nevneren i (8) har minimalverdi. Minimalverdien av radikanden finnes ved derivasjon mhp ω_y:

$$b^2 2\omega_y + 2(m\omega_y^2 - k)2m\omega_y = 0$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} = \omega_{res}$$

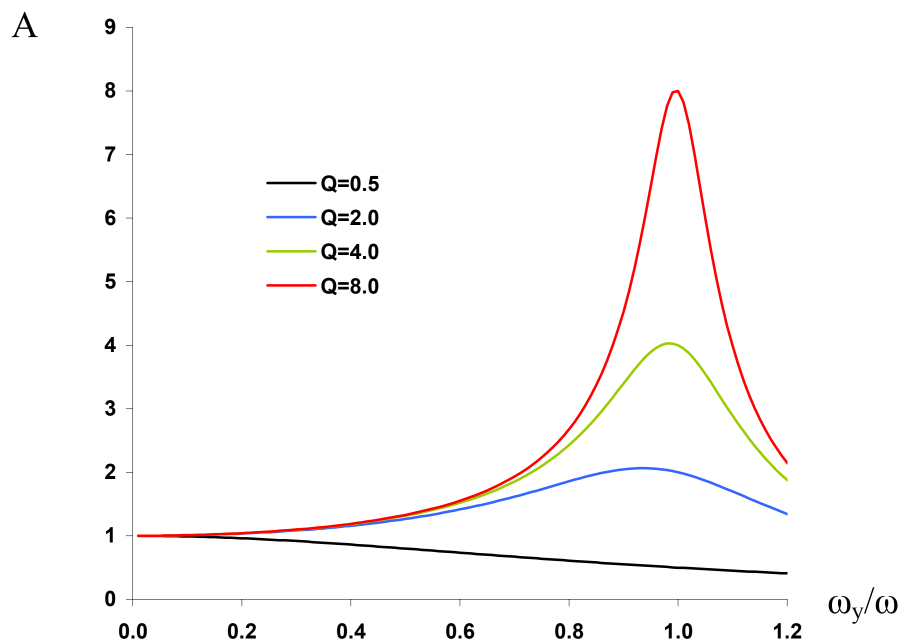
der ω_{res} er den vinkelfrekvens som gir maksimal amplitude.
Den frekvens som gir maksimal amplitude kalles resonansfrekvensen.
Resonansfrekvensen er

$$f_{res} = \frac{\omega_{res}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Vi definerer kvalitetsfaktoren Q ved

$$Q = \frac{m\omega}{b}$$

der $\omega = \sqrt{k/m}$, systemets naturlige vinkelfrekvens, dvs. den vinkelfrekvens systemet ville svinge med i fravær av dempning. Kvalitetsfaktoren beskriver graden av dempning. Når dempningen er liten er kvalitetsfaktoren stor. Figur 4 viser amplituden som funksjon av ω_y/ω for forskjellige Q-verdier. Maksimal amplitude (resonans) for svingningene øker med Q. Vinkelfrekvensen for maksimal amplitude er ω_{res}, og ω_{res} går mot ω når Q øker. Legg også merke til at kurveformen blir smalere når Q vokser. Dette betyr at vinkelfrekvensintervallet som gir store amplituder avtar med Q. Store Q-verdier kan skape store problemer for mekaniske systemer, f.eks. broer, som utsettes for periodiske ytre krefter med frekvenser nær systemets naturlige svingefrekvens. Vi kommer tilbake til kvalitetsfaktorer senere i forbindelse med elektriske svingekretser.



Figur 4: Amplituden for tvungne svingninger som funksjon av vinkelfrekvensen til den påtrykte kraften, Fy, for en del Q-verdier. Amplituden for $\omega_y = 0$ er satt lik 1 i dette eksemplet.