Oblig 3 FYS2130 våren 2008

29. april 2008

Tema: Diffraksjon (inklusiv nærfelt-diffraksjon)[1].

1 Generelt

Denne obligen ble lagt ut såpass sent og det kommer så mange helligdager inn i perioden framover, at vi utsetter innleveringsfristen til tirsdag 13. mai kl 1530. Obligen skal leveres som papirkopi på ekspedisjonskontoret, og navn må føres på besvarelsen (ikke kandidatnummer). Elektroniske besvarelser godtas bare når det finnes spesielle årsaker som tilsier dette. I så fall må man be om å få levere elektronisk på forhånd og fått aksept for dette. Om lag 3/4 av alle deloppgavene i obligen må være rimelig godt besvart for at man skal få den godkjent.

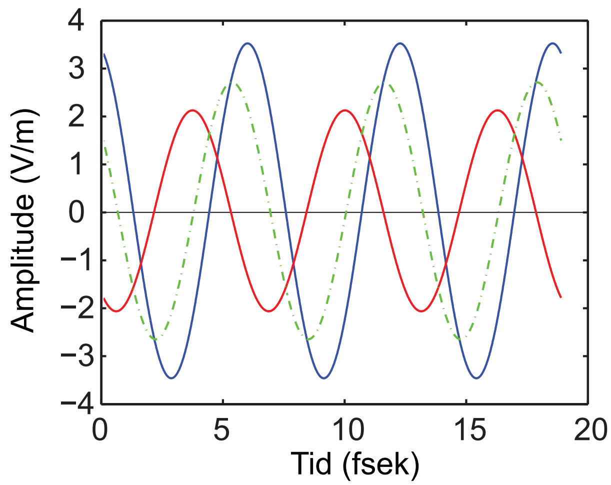
Det må utarbeides et datamaskinprogram for å kunne løse obligen. Man kan bruke C, C++, Java, Matlab, Python m.m., men vi vil kun gi veiledning ved bruk av Matlab. Vi anbefaler meget sterkt at man følger gruppene og får tips og hjelp til programmeringen og andre aspekter ved obligen der. Dersom man forsøker å gjøre alt på egen hånd, vil enkelte kunne få problemer med å komme gjennom oppgaven. Et Matlab-program som løser obligen kan skrives på i størrelssorden 50 linjers kode.

Dette skrivet starter med å gi litt teoribakgrunn og programmeringstips. Deretter gis selve spørsmålene / oppgavene som må gjøres.

[1] Tekst og figurer i dette skrivet: ©2008: Arnt Inge Vistnes

2 Fasorer, et nyttig hjelpemiddel

Når vi skal legge sammen to eller flere cosinussignaler med samme frekvens, men ulik amplitude og fase, er det ofte svært nyttig å bruke en grafisk representasjon som vi kaller fasorer.



Figur 1: *To cosinusfunksjoner med ulik amplitude og fase tegnet i et tidsbilde. Summen er angitt som en stiplet linje.*

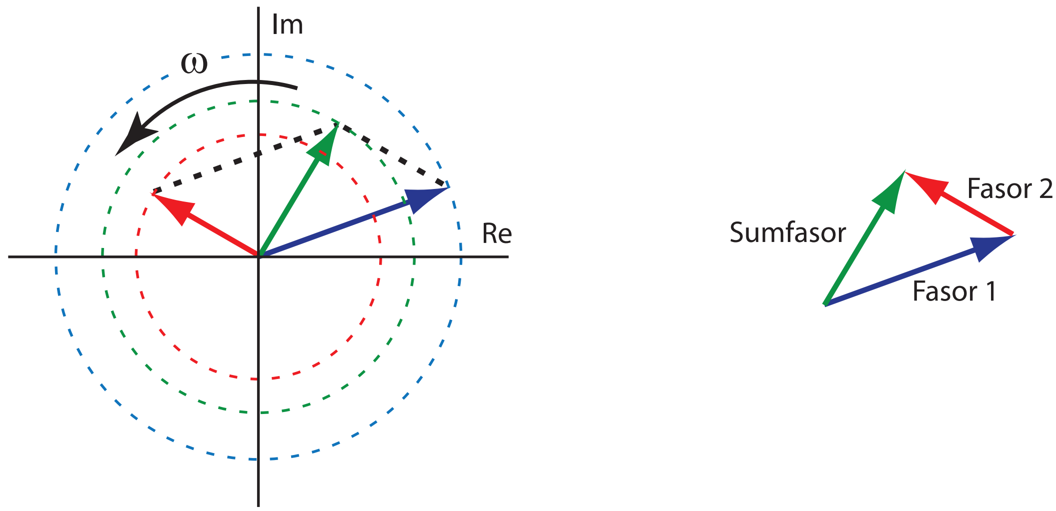
Skal vi for eksempel legge sammen følgende to cosinuser:

$$f_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$f_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

kan vi starte med å representere hvert av signalene grafisk ved en todimensjonal vektor som har lengde lik amplituden og vinkel i forhold til positiv x-akse lik $\omega t + \phi_i$, hvor i=1 eller 2. I så fall vil alltid x-komponenten av vektoren være lik øyeblikksverdien av funksjonen ved det tidspunktet vi velger. Vi velger ofte å tegne vektorene for $t = 0$, men dersom man skal følge tidsutviklingen til et signal, lar man fasoren dreie seg om origo med vinkelhastighet lik ω.

Det smarte ved denne representasjonen er at når vi skal legge sammen to cosinussignaler med samme frekvens, kan vi legge sammen de tilhørende fasorene vektorielt, og sumvektoren vil da være en korrekt fasor for summen av funksjonene. Dette er illustrert i figurene 1 og 2.



Figur 2: *Et fasordiagram som gir et øyeblikksbilde av to cosinusfunksjoner med ulik amplitude og fase. Summen er også angitt som vektorsummen av de to opprinnelige fasorene (vektorene). I venstre del av figuren er det antydet at fasorene roterer som funksjon av tid, men dersom vi hele tiden holder oss til summasjon ved valgt $t = 0$, kan vi addere vektorene på en litt friere måte (som vist til høyre)*

.

3 Diffraksjon: Numerisk implementasjon av Huygens' og Fresnels prinsipp

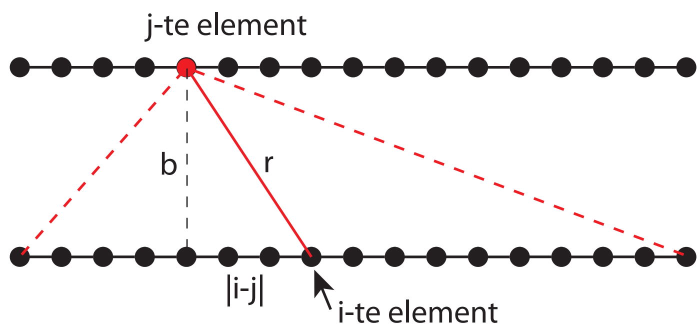
Vi skal nå starte med numeriske beregninger av diffraksjon. Vi tenker oss da at vi har en lang, smal spalt i en plan flate, og at det kommer f.eks. lys inn i spalten med bølgefront parallelt med flaten. Systemet vårt har da delvis en sylindersymmetri, og alle posisjoner i en retning parallelt med spalten vil ha samme intensitet. Et slikt problem kan derfor behandles i to dimensjoner (i et plan som står vinkelrett på spaltens retning).

Vi skal så beregne hvordan lysintensiteten fordeler seg på en skjerm et lite stykke etter spalten. Vi antar at vi har med et stasjonært system å gjøre slik at lyset har stått på så lenge at det ikke skjer noe endring i lysintensiteten (gjennomsnittsverdi over en periodetid for svingningene) rundt omkring i det volumet vi betrakter.

Ved beregning av lysfordelingen på skjermen, kan vi da (som en tilnærming) bruke Huygens prinsipp, eller bedre, Fresnels prinsipp som sier:

Vi kan finne lysets amplitude i et punkt P etter spalten ved å anta at ethvert lite område i spalten sender ut elementærbølger. Totalt lys i P finner vi ved å legge sammen bidragene fra alle elementærbølgene, forutsatt at vi vekter amplitudene etter hvor langt vi er fra startpunktet, og at vi tar hensyn til at bølgene har ulik fase.

Ved beregninger ved hjelp av en datamaskin må det brukes diskrete posisjoner langs en linje normalt på spalten og en tilsvarende linje på skjermen. Vi kan ikke behandle en kontinuerlig posisjonsvariasjon, men resultatene basert på diskrete punkter er nær opp til resultater vi hadde fått dersom vi brukte en kontinuerlig beskrivelse (siden vi antar at systemet er lineært). Forutsetningen at vi velger de diskrete punktene tett nok. Ved beregning av diffraksjonsfenomener må det være flere punkter per bølgelengde i "eksitasjonsplanet" (der f.eks. spalten ligger) . Vi kan forsøksvis prøve med fire punkter per bølgelengde.



Figur 3: *Ved numeriske beregninger må man velge diskrete posisjoner i eksitasjonsplanet (nederst) og skjermplanet (øverst). For å finne amplituden til bølgen et sted på skjermen, må man legge til bidrag fra alle punkter i eksitasjonsplanet og ta hensyn både til amplitude og fase (og siden også retningen på feltet)*

.

Figur 3 viser prinsipielt hvordan vi kan gå fram ved beregningene. Dersom vi skal finne relativ lysintensitet i ett valgt punkt j på skjermen, må vi først finne amplituden i det aktuelle punktet og så kvadrere denne. Amplituden finnes ved å bruke superposisjonsprinsippet: Man legger sammen bidrag fra alle punkter i spaltplanet (på amplitudenivå!). Det er tilstrekkelig å nøye seg med å beregne bidrag fra de punktene i spalteplanet der det faktisk er lys, men programmeringsteknisk kan det være like greit å legge til bidrag fra *alle* punkter i spalteplanet, uansett om det opprinnelig er lys der eller ikke. I så fall får vi et program som også kan håndtere andre geometrier enn en spalt.

Lyset er en bølge og elementærbølgene beskrives ved en bølgefunksjon som i vårt tilfelle har sylindersymmetri:

$$E(r,t) = E_0(r)\cos(kr - \omega t + \phi)$$

Da har vi ikke tatt hensyn til *retningen* til det elektriske og magnetiske feltet i rommet, bare til amplituden.

Merk at når vi skal legge sammen bidrag fra alle "punkter" i eksitasjonsplanet, vil vi måtte legge sammen mange cosinusfunksjoner med samme frekvens, men ulik amplitude og fase. I en slik situasjon er fasorer et utmerket hjelpemiddel. Vi kan finne fasorene til hvert av bidragene og legge dem sammen vektorielt. Vi kan da droppe tidsutviklingen, og bare anvende fasorene i ett valgt tidspunkt, f.eks. et valgt $t = 0$. I så fall får vi det totale elektriske feltet i det j-te punkt på skjermen ved følgende summasjon (når vi ser bort fra at det elektriske feltet har en retning):

$$E_j = \sum_i E_0(r)\cos(kr + \phi_i)$$

$$E_j = \sum_i E_0(r_{ij})\cos(2\pi\frac{r_{ij}}{\lambda} + \phi_{i0}) \tag{1}$$

Avstanden mellom kildepunkt og skjermpunkt er gitt med Pythagoras:

$$r_{ij} = \sqrt{b^2 + (\frac{|j-i|}{m})^2}$$

Her er b avstand mellom spalt og skjerm og m er antall punkt per bølgelengde i våre beregninger. Amplituden til enkeltbidragene vil være proporsjonal med amplituden i kildepunktet dividert på kvadratroten av gangveien for denne elementærbølgen

$$E_0(r_{ij}) \quad \propto \quad \frac{E_{0,i}}{\sqrt{r_{ij}}} \tag{2}$$

Proporsjonalitetskonstanten som man skal bruke i tillegg avhenger av hvor fin oppdeling vi har valgt. Dersom vi har valgt å dele opp kildeplanet og skjermplanet med m punkter per bølgelengde, viser det seg at vi kan bruke følgende uttrykk:

$$E_0(r_{ij}) = \frac{E_{0,i}}{m\sqrt{r_{ij}}}$$

Dem siste detaljen som må på plass er faseforskjeller mellom elementærbølgene. Disse skyldes delvis faseforskjeller ϕ_{i0} fra punkt til punkt i eksitasjonsplanet, og delvis faseforskjeller på grunn av ulik veilengde for ulike elementærbølger. Faserelasjonen er allerede gitt i ligning 1:

$$\phi_{i,totalt} = 2\pi\frac{r_{ij}}{\lambda} + \phi_{i0}$$

Programmeringsteknisk er det en detalj vi bør legge merke til. Når vi skal regne ut amplituden i punkt j på skjermen, må vi addere bidrag fra alle punkter i eksitasjonsplanet (der f.eks. spalten ligger). Det er samme avstand mellom punktene i og j som mellom f.eks. $i + 20$ og $j + 20$. Det er derfor helt unødvendig å gjøre beregninger av avstander og ekstra faseskift pga forskjeller i gangavstand på ny for hver eneste j og i. Vi bør heller lage en array som gir de aktuelle tallene en gang for alle før vi foretar summasjon av enkeltbidrag.

Vi ser imidlertid at for $j = 1$ vil $i - j$ variere fra 0 til N (dersom vi har N punkter i hvert av planene), mens for $j = N$ vil $i - j$ variere fra $-N$ til 0. Det kan derfor være enklest programmeringsteknisk å lage en array som f.eks. gir r for $2N + 1$ verdier som svarer til at indeksen i kan ha alle verdier fra N mindre enn j til N større enn j. Det samme gjelder når vi skal lage en array som angir faseforskjeller på grunn av forskjell i veilengder.

Når det gjelder å addere fasorer sammen, gjør vi som ved vanlig vektoraddisjon: Vi legger sammen komponent for komponent, det vil si bidrag i horisontal retning med horisontal retning (se figur 2) og tilsvarende for vertikal retning. Det vil si:

$$SumFasor_{h,j} = \sum_i E_0(r_{ij}) \cos(2\pi\frac{r_{ij}}{\lambda} + \phi_i)$$

$$SumFasor_{v,j} = \sum_i E_0(r_{ij}) \sin(2\pi\frac{r_{ij}}{\lambda} + \phi_i)$$

Lengden på sumvektoren blir da (Pythagoras):

$$SumFasor_{lengde,j} = \sqrt{SumFasor_{h,j}^2 + SumFasor_{v,j}^2}$$

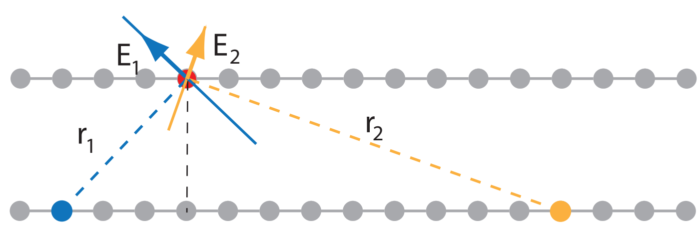
Og dersom vi også ville vite fasen til denne, kunne vi finne det med uttrykket:

$$SumFasor_{fase,j} = \arctan(SumFasor_{v,j}/SumFasor_{h,j})$$

4 Forfinet behandling: Tar hensyn til at elektrisk felt er en vektor.

I både Huygens' og Fresnels prinsipp tar man ikke hensyn til at lys er en elektromagnetisk bølge der man må addere elektrisk felt vektorielt for å finne summen. I behandlingen i forrige punkt så vi bort fra dette, og feilen man gjør er ikke alvorlig så lenge skjermen man fanger opp lyset på er svært langt unna eksitasjonsplanet sammenlignet med bølgelengden. Da opererer man med såkalt Fraunhofer-diffraksjon ("fjernfelt-diffraksjon") og delvis også nærfelt-diffraksjon ("Fresnel diffraksjon").

Feilen man gjør når vi ser bort fra at elektrisk felt er en vektor, blir alvorligere og alvorligere etter som man flytter skjermen nærmere og nærmere planet der spalten(e) eller kanten finnes. Det ser vi av figur 4.



Figur 4: *Når skjermen er meget nær eksitasjonen, må man også ta hensyn til retningen til det elektriske feltet når man skal addere bidrag fra alle elementærbølger. Elektrisk felt er normalt på retningen fra elementærbølgens kilde og stedet vi regner ut sumamplituden i. Mulige retninger (og variasjonsområde) er markert med en rett fargekodet strek). Se teksten for flere detaljer.*

.

I figuren er feltets retning angitt som en strek, men hvorvidt elektrisk felt peker i den ene eller andre retningen av denne streken, og hvor langt ut pilen går i forhold til streken, er avhengig av fasen til elementærbølgen på det tidspunktet vi foretar summasjonen. Så lenge vi bruker fasornotasjon, blir disse siste detaljene automatisk tatt hånd om, men vi må selv ta hånd om E-feltets retning.

Vi kan ta hensyn til E-feltets retning dersom vi bruker samme fremgangsmåte som i punkt 3,først for den komponenten av det elektriske feltet som er parallell med skjermen, og dernest for komponenten som er normal på skjermen. Man bruker så Pythagoras til slutt.

Programmeringsmessig tips: Det kan også her være nyttig å lage to arrayer for å beregne sinus og cosinus til aktuelle vinkler før man går inn i siste summasjonsløkken der bidragene fra alle elementærbølgene legges sammen. Ellers vil beregningene ta fryktelig lang tid.

5 Selve oppgavene

Oppgave 1: Fasorer.

Vis matematisk at når man skal addere to cosinusfunksjoner med ulik amplitude og fase, men med samme frekvens, vil sumvektoren til de to fasorene som representerte de opprinnelige funksjonene, være en fasor som svarer til summen av de to analytiske funksjonene vi startet med.

Oppgave 2a: Én spalt, Fresnels prinsipp, en detalj

I ligning 2 valgte vi å la amplituden til en elementærbølge avta med en over kvadratroten av avstanden. Hvorfor får vi en slik avstandsavhengighet (kvadratroten) her? (Hint: sylindersymmetri.)

Oppgave 2b: Én spalt, Fresnels prinsipp, numeriske beregninger.

Lag et dataprogram som beregner både amplitude og intensitet (relative verdier innen hvert plot) på en skjerm plassert b bølgelengder vekk fra en smal, lang spalt som er ti bølgelengder bred. Skjermen bør være om lag 1000 bølgelengder bred. Kjør programmet for $b = 10$, 100, og 1000, og skriv ut egnede plot som viser intensitetsfordelingen (bør bruke zoom). Kommentér resultatene.

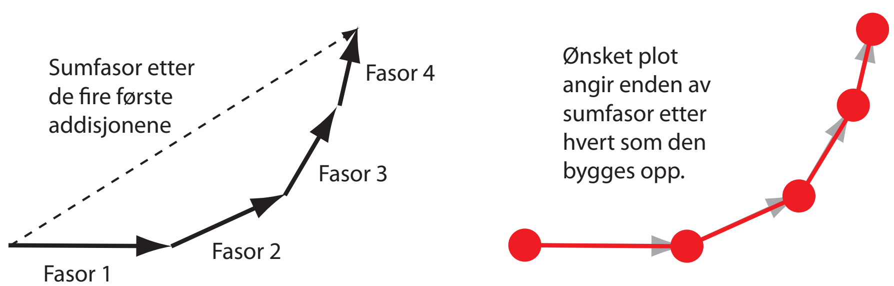
MERK: Legg ved en utskrift av dataprogrammet du brukte i denne oppgaven.

Oppgave 2c: Diffraksjon fra en rett kant.

Modifiser programmet litt slik at det burde kunne beregne intensitetsfordelingen for en rett kant. Eksitasjonen er da som følger: På den ene siden av kanten er det en blendingsflate som ikke slipper gjennom noe lys, på den andre siden av kanten er det homogent lys. Anta at 3/4 av eksitasjonsflaten er belyst og 1/4 sort pga blendingsflaten. Anta at det er plane bølger som kommer inn mot planet der kanten og blendingen ligger.

Velg å betrakte intensiteten når skjermen settes opp 1000 bølgelengder fra kant og blendingsflate. Skjermen bør være minst om lag 100 bølgelengder bred.

Resultatet er kanskje ikke helt som forventet? Kommenter resultatet og hva som måtte gjøres for å få et mer korrekt svar.



Figur 5: *Ønsket plot for å vise hvordan vektorsummen av fasorene langsomt men sikkert bygges opp av bidrag fra de ulike elementærbølgene.*

.

Oppgave 2d: Fasoraddisjon og Cornu's spiral, diffraksjon fra en kant.

Bruk programmet og betingelser du hadde i punkt 2c, men lag et plot som viser hvordan vektorsummen til fasorene som er involvert bygges opp underveis i det punktet på skjermen som ligger like overfor kanten. Du skal med andre ord lage et plot der de første punktene kanskje ser ut omtrent som vist i figur 5. Det er ikke meningen å tegne inn piler, bare punkter med linjer mellom. (Tips: Kan hende du ønsker å bruke kommandoen 'axis square' etter plottkommandoen?)

En liten digresjon: Den kurven du da får fram ligner på det vi i matematikken kaller en Cornu-spiral. Søk litt på nettet og finn ut hva en Cornu-spiral har med motorveier å gjøre?

Oppgave 2e: Diffraksjon fra en dobbeltspalt.

Endre eksitasjonen slik at du får en dobbeltspalt. Velg bredde og avstand mellom spaltene slik at du får om lag fem intensitetstopper innenfor den sentrale toppen i "omhyllingskurven". Velg to ulike avstander mellom spalter og skjerm og en skjermbredde som er tilstrekkelig for å vise de viktigste resultatene.

Oppgave 3a: Diffraksjon i nærfelt-området, analytisk uttrykk.

Finn et analytisk uttrykk for hvordan du kan hente ut de to komponentene av elektrisk felt på et angitt sted (indeks j) fra en vilkårlig valgt elementærbølge som stammer fra en posisjon angitt med indeks i) (refererer da til punkter som vist i figur 3).

Oppgave 3b: Diffraksjon i nærfelt-området, numerisk beregning.

Modifiser programmet du har brukt slik at du også tar hensyn til retningen til det elektriske feltet fra hver av elementærbølgene. Beregn lysintensiteten fra en spalt som er 40 bølgelengder bred på en skjerm 2 bølgelengder vekk fra spalten. Velg selv en tilstrekkelig bredde på skjermen og å zoome inn på detaljer.

Gjennomfør beregninger for disse dimensjonene også med den versjonen av programmet du brukte i oppgave 2b. Skriv ut begge resultatene på en måte som gjør det mulig å se en eventuell forskjell. Bruk zoom om nødvendig. (Tips: Du kan la være å delete utskriften fra forrige kjøring for å få både kurven for forrige kjøring og denne kjøringingen inn i samme diagram.)

Gjenta de to kjøringene for det tilfellet at skjermen er 40 bølgelengder vekk fra spalten. Kommenter resultatene.

EKSTRA UTFORDRING for de som ønsker det! (Teller ikke som del av obligen mhp godkjenning eller ikke.)

Modifiser programmet slik at du ser på diffraksjonsbildet fra en spalt der fasen innenfor spalten IKKE er konstant (m.a.o. at bølgefronten inn mot spalten ikke er plan). Bruk f.eks. en spalt som er 40 bølgelengder bred og som har en faseforskjell midt i spalten som er fire bølgelengder *etter* fasen ved kanten av spalten. Beregn intensitetsprofilen 100 og 400 bølgelengder fra spalten.

Gjennomfør samme beregning for det tilfellet at faseforskjellen i midten av spalten er fire bølgelengder *foran* fasen ved kanten av spalten. Kommenter resultatene. Hvordan vil du forresten betegne bølgefronten ved eksitasjonsplanet i disse to tilfellene?