

Kollokvium 2  
Mer matematikk i FYS2140

30. januar 2014

Det andre kollokviet i FYS2140 fortsetter der det første slapp, og ser mer på matematikken som vi bruker. Under gir vi tre oppgaver som du kan prøve deg på på Kollokvium, og få hjelp med dersom du trenger det. Den første oppgaven dreier seg om statistikk og sannsynlighetsfordelinger som vi skal jobbe mye med i kurset. Dette er Oppgave 1.3 i Griffiths. Den andre oppgaven dreier seg om en teknikk for løsning av differensialligninger, og til slutt har vi en diskusjonsoppgave om opphavet til Schrödingerligningen.

### Oppgave 1 Statistikk

Vi betrakter den gaussiske sannsynlighetsfordelingen

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}, \quad (1)$$

hvor  $A$ ,  $a$  og  $\lambda$  er positive reelle konstanter. Slå opp integraler du behøver i Rottmann.

- a) Bruk kravet om bevaring av sannsynlighet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1, \quad (2)$$

til å bestemme  $A$ .

- b) Finn forventningsverdien til  $x$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x) dx, \quad (3)$$

forventningsverdien til  $x^2$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x) dx, \quad (4)$$

og standardavviket  $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ .

- c) Tegn grafen til  $\rho(x)$ .

### Oppgave 2 Differensialligninger

En vanlig teknikk for å løse (partielle) differensialligninger er såkalt **separasjon av variable**. Dette er nyttig for oss fordi det meste av FYS2140 går ut på å løse nettopp en bestemt slik ligning, Schrödingerligningen. Vi skal her, som en oppvarming, se på et annet ofte brukt eksempel, som er ligningen:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5)$$

hvor du skal finne funksjonen  $u(x, t)$  gitt noen grensebetingelser:  $u(x, 0) = f(x)$ , og  $u(0, t) = 0$  og  $u(L, t) = 0$ .

Dette er langt fra et tilfeldig matematisk uttrykk. Denne ligningen har en viktig fysisk betydning: det er **varmeledningsligningen** som beskriver hvordan temperaturen  $u(x, t)$  i en stang med lengde  $L$  endrer seg med posisjonen  $x$  og tiden  $t$ . Konstanten  $a$  er den såkalte diffusjonskonstanten.<sup>1</sup> Grensebetingelsene i problemet forteller oss hvordan temperaturen i stangen er ved tiden  $t = 0$  gjennom funksjonen  $f(x)$  og at temperaturen i endene av stangen holdes på  $0^\circ\text{C}$  gjennom kontakt med et annet materiale.<sup>2</sup>

Ved separasjon av variable antar vi at en løsningen på problemet kan skrives som et produkt av to (eller flere) funksjoner som hver bare avhenger av en av variablene. I vårt eksempel bruker vi de to funksjonene  $X(x)$  og  $T(t)$  og antar at vi kan skrive

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6)$$

Vi forsøker så å dele ligningen inn i to deler som hver bare avhenger av en av variablene.

a) Vis at når vi setter (6) inn i (5) så får vi

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{aT(t)} \frac{dT(t)}{dt}. \quad (7)$$

Fordi vi kan velge å endre en variabel,  $x$  eller  $t$ , om gangen, så må hver side av ligningen være konstant. Denne konstanten kaller vi for  $-\sigma$ . Vi kan nå løse de to ligningene:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\sigma \quad \text{og} \quad \frac{1}{aT(t)} \frac{dT(t)}{dt} = -\sigma. \quad (8)$$

b) Vis at ligningen for tidsavhengigheten har løsningen

$$T(t) = Ce^{-a\sigma t}, \quad (9)$$

hvor  $C$  er en vilkårlig konstant. Hvorfor kan vi uten problem sette  $C = 1$ ?

c) Det viser seg at vi må ha  $\sigma > 0$  i fysiske løsninger, kan du forklare hvorfor det må være tilfelle? *Hint:* Tenk på de fysiske konsekvensene av  $\sigma < 0$ .

Vi lærte i Oblig 1 (Oppgave 2c) at ligningen for  $X(x)$  har løsningene

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\sigma}x) + B \cos(\sqrt{\sigma}x). \quad (10)$$

---

<sup>1</sup>For spesielt interesserte er den gitt som  $a = \kappa/\rho s$ , hvor  $\kappa$  den termiske ledeevnen til stangen,  $\rho$  er massetettheten i materialet og  $s$  er den spesifikke varmekapasiteten.

<sup>2</sup>Vi kunne selvsagt valgt en annen vilkårlig konstant temperatur her.

- d) Bruk grensebetingelsene for endene av stangen for å bestemme  $B$  og  $\sigma$ , og vis at vi får løsningen

$$u(x, t) = A \sin(n\pi x/L) e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Vi har nå funnet en *spesifikk* løsning av varmeledning ligningen ved bruk av separasjon av variable teknikken, men du lurer kanskje på hvordan man finner den generelle løsningen, som slett ikke trenger la seg separere slik som vi antok i (6)? Eller hvordan man finner en løsning som oppfyller grensebetingelsen  $u(x, 0) = f(x)$  for en vilkårlig funksjon  $f(x)$ ? Her kommer Fouriers teorem oss til unnsetning, dette sier at vi kan gjenskape funksjonen  $f(x)$  ved en uendelig sum av sinusfunksjoner,<sup>3</sup> altså spesifikke løsninger med forskjellig  $n$ . Uten at vi vil diskutere dette i mer detalj her blir den generelle løsningen:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \quad (12)$$

hvor  $A_n$  velges slik at  $u(x, 0) = f(x)$ .

### Oppgave 3 Diskusjonsoppgave

På kollokviumssiden finner du en artikkel av Felix Bloch som diskuterer opphavet til kvantemekanikken og Schrödinger ligningen. Les artikkelen, med spesiell vekt på de første to sidene, og tenk gjennom/diskuter med de andre på kollokviet følgende:

- Hvorfor må en bølgeligning være en differensialligning i posisjon og tid?
- Hvordan tror du Schrödinger gikk frem for å lag seg en ny bølgeligning? (Hva slags ingredienser må den ha? Hva slags konstanter kan inngå? Hva må enhetene være?)

Dette er selvfølgelig veldig åpne spørsmål, og vi skal komme tilbake til Schrödingers tanker i et senere kollokvium.

---

<sup>3</sup>I alle fall så lenge  $f(x)$  oppfører seg pent nok.