Kollokvium 4
Operatorer og lineæralgebra

12. februar 2014

I dette kollokviet skal vi se litt mer på operatorer og sammenhengen mellom kvantemekanikk og lineæralgebra. Under gir vi tre oppgaver som dere kan prøve dere på. Jobb gjerne sammen.

Den første oppgaven er en diskusjonsoppgave om egentilstander (egenfunksjoner) og operatorer. Den andre oppgaven er en reprise fra Kollokvium 1, som forhåpentligvis gir mer mening nå som vi har introdusert integralene for normalisering av bølgefunksjoner og for forventningsverdi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\,dx = 1 \quad \text{og} \quad \langle Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{Q}\Psi(x,t)\,dx. \tag{1}$$

Oppgave 2 viser oss at disse integralene egentlig er indreprodukt, altså forteller det første integralet at $\Psi(x,t)$, sett på som en vektor, er en enhetsvektor (normalisert vektor), og det andre at forventningsverdien til Q er gitt som indreproduktet av (vektorene) $\Psi(x,t)$ og $\hat{Q}\Psi(x,t)$. Oppgave 2 gir oss også en effektiv notasjon for å skrive ned disse integralene, vi kan skrive de som, henholdsvis, $\langle\Psi|\Psi\rangle$ og $\langle\Psi|\hat{Q}\Psi\rangle$.

I den siste oppgaven ser på hermitiske matriser. Disse er en bestemt type hermitiske operatorer som vi bruker når tilstandene våre, som vi hittil har beskrevet med bølgefunksjoner, istedet beskrives med vanlige vektorer. Denne situasjonen har vi ikke møtt enda i kurset, men vi kommer til noen eksempler mot slutten, når vi skal se på spinn.

Oppgave 1 Diskusjonsoppgave

Diskuter følgende spørsmål med hverandre og prøv å bli enige om noen svar:

a) Hva betyr det at en tilstand er en egentilstand for en operator?

b) Kan en tilstand være en egentilstand for både operatoren $\hat{x}$ og operatoren $\hat{p}$ samtidig?

c) Hva kan vi vite om tilstander som ikke er egentilstander?

Oppgave 2 Gøy med lineæralgebra

I lineæralgebra definerer man et **indreprodukt** mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som en generalisering av det velkjente skalarproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v}$. For å unngå sammenblanding med notasjonen til det gamle skalarproduktet kan vi begynne å skrive indreproduktet som $\langle u|v\rangle$, hvor vi har droppet å skrive vektorpilen for enkelhets skyld (en forklaring på denne skrivemåten kommer senere i kurset). Et indreprodukt må oppfylle følgende egenskaper (hvor k_1 og k_2 er to, muligens komplekse, tall):

$$\text{i)} \quad \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*, \tag{2}$$

$$\text{ii)} \quad \langle u|(k_1 v + k_2 w)\rangle = k_1\langle u|v\rangle + k_2\langle u|w\rangle, \tag{3}$$

$$\text{iii)} \quad \langle u|u\rangle \geq 0, \text{ og } \langle u|u\rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \vec{u} = 0. \tag{4}$$

Bruk dette til å vise at den følgende definisjonen oppfyller alle kravene til et indreprodukt for to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$:

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx, \tag{5}$$

dersom de involverte integralene finnes (ikke er uendelige).

Konsekvensen av det du her viser er at funksjoner kan fungere som element i et abstrakt vektorrom, de er en form for vektorer de også! Vi nevner tilslutt at det er tilstrekkelig for at integralet i indreproduktet (5) skal finnes at

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{og} \quad \int_a^b |g(x)|^2\,dx < \infty. \tag{6}$$

Vi sier da at funksjonene f og g er **kvadratisk integrerbare**.

Oppgave 3 Mer gøy med lineæralgebra

Har du tenkt over at både vektorer og matriser godt kan bestå av komplekse tall? For vektorer er det nok å utvide definisjonen av (det euklidske) skalarproduktet mellom to n-dimensjonale vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ til å være

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = w_1^*v_1 + w_2^*v_2 + \ldots + w_n^*v_n. \tag{7}$$

I lineæralgebra har vi sett symmetriske matriser hvor den transponerte av matrisen er den samme, altså at gitt en matrise A så er $A^T = A$. Dette begrepet kan utvides til såkalte **hermitiske matriser**. Vi definerer den **hermitisk konjugerte** matrisen $A^\dagger$ som den matrisen du får når du både transponerer og komplekskonjugerer tallene i matrisen, altså er $A^\dagger = (A^T)^*$. En hermitisk matrise A har da $A^\dagger = A$.

Vis at de såkalte **spinn-matrisene**

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

er hermitiske, finn $\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2$ og vis at den også er hermitisk.

Fortsett med å vise at

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

er egenvektorer til både $\hat{S}_3$ og $\hat{S}^2$, og finn egenverdiene. Dersom spinnmatrisene er de hermitiske operatorene til observable størrelser, hva betyr dette fysisk for partikler som er beskrevet av egenvektorene?

Som en skikkelig utfordring til de som har lyst lar vi de følgende tre utsagnene stå ubevist til slutt:

1. Egenverdiene til en hermitisk matrise er alltid reelle.

2. Egenvektorene til en hermitisk matrise som tilhører forskjellige egenverdier er alltid ortogonale.

3. For en hermitisk matrise A og to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er skalarproduktet $\vec{w} \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{w}) \cdot \vec{v}$.

Fortvil ikke om du ikke får til å bevise dette, men let gjerne opp et bevis i en lærebok eller på nettet.