Kollokvium 9
Spinn

2. april 2014

I dette kollokviet skal vi se på spinn. Under gir vi en lengre oppgave som dere kan prøve dere på. Jobb gjerne sammen.

Oppgave 1 Spinn

Vi skal se på noe av fysikken bak kjernemagnetisk resonans (Nuclear Magnetic Resonance, NMR), som brukes til å undersøke molekylstrukturen i stoffer, og som kan brukes i medisin for å ta bilder av kroppens indre.

Prinsippet bygger på at at protonene inne i atomokjernen er, som elektroner, fermioner med spinn–$\frac{1}{2}$. Som vi har lært på forelesning har de da et magnetisk dipolmoment på grunn av spinnet alene:

$$\vec{\mu} = g_p \frac{e}{2m_p} \vec{S}, \tag{1}$$

hvor g_p er den såkalte gyromagnetiske faktoren for protonet, e er protonets ladning, m_p protonets masse og $\vec{S}$ er spinnvektoren.

Med et sterkt magnetfelt i z–retningen, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, så har de to spinntilstandene til protonet (for eksempel i en hydrogenkjerne i et vannmolekyl) forskjellig energi på grunn av forskjellen i potensiell energi som skyldes magnetfeltet. Overganger mellom disse to tilstandene, som sender ut fotoner, kan så brukes til å si noe om hva slags stoff vi har.

a) Finn energiforskjellen når vi vet at det **nuklære magneton**, $\mu_N = e\hbar/2m_p$, er gitt ved $\mu_N = 3.152 \times 10^{-8}\,\mathrm{eV/T}$, $g_p = 2.793$, og vi antar at magnetfeltet er på hele $B_0 = 1\,\mathrm{T}$.[1] Finn også ut av hvilken retning spinnet må ha i forhold til magnetfeltet for å ha minst energi.

b) Diskuter hvorfor denne energien er bedre egnet til medisinske undersøkelser enn energien til for eksempel et Röntgenapparat.

For å kunne bruke dipolmomentet til protonene til noe praktisk må vi kunne manipulere med det slik at flere protoner har spinnet rettet i den ene retningen enn den andre.[2] Vi skal her se litt på kvantemekanikken som beskriver spinnretningen. Vi skal tilbake til Kollokvium 4 hvor vi introduserte (litt forut for vår tid), spinnoperatorene:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

c) Vis at Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ for et ellers fritt proton, gitt magnetfeltet i oppgave **a)**, er gitt ved

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\gamma B_0 \hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

[1] Vi kan maksimalt skape noen titalls tesla i et laboratorium over lengere tid, men selv dette er svært vanskelig.

[2] I fred og fordragelighet vil andelen av spinn i de to retningene oppnå en balanse basert på termisk likevekt.

hvor $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_p}\nabla^2$ og $\gamma = g_p e/2m_p$ er det **gyromagnetiske forholdstall** for protonet.

d) Diskuter hvorfor $\hat{H}_0$ og $\hat{S}_z$ kommuterer.

e) Finn de to egentilstandene til $\hat{H}$, χ_+ og χ_-, og egenverdiene E_+ og E_-. *Hint:* Du kan ignorere $\hat{H}_0$ på grunn av **d)**. Hvorfor?

f) Vis at løsningen av Schrödingerligningen er

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} Ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ Be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

hvor A og B er to konstanter.

g) Normaliseringen til tilstanden χ er gitt ved kravet $\chi^\dagger\chi = 1$, hvor $\chi^\dagger = (\chi^T)^*$, altså både transponering og komplekskonjugering.[3] Bruk dette til å vise at vi kan velge $A = \cos\frac{\alpha}{2}$ og $B = \sin\frac{\alpha}{2}$, hvor α er en konstant som kan bestemmes fra initialbetingelsen $\chi(0)$.

h) Finn forventningsverdiene til komponentene av spinnet i magnetfeltet: $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ og $\langle S_z\rangle$. *Hint:* Den naturlige definisjonen av forventningsverdien til en observabel størrelse O er nå gitt ved skalarproduktet:

$$\langle O\rangle = \langle\chi|\hat{O}\chi\rangle = \chi^\dagger\hat{O}\chi. \tag{5}$$

For å endre på spinnet i z–retningen kan vi nå introdusere et tidsvarierende magnetfelt. Dette vil imidlertid kreve et tidsavhengig potensiale, som vi ikke har sett på løsningen av Schrödingerligningen for, så det får vente til en annen gang.

[3]Dette er det vanlige skalarproduktet mellom to (komplekse) vektorer.