Løsningsforslag Kollokvium 1

30. januar 2015

Her finner dere et løsningsforslag for oppgavene som ble diskutert på Kollokvium 1.

Oppgave 1 Regning med enheter

a) Energienheten 1 eV (elektronvolt) er definert som økningen i kinetisk energi når et elektron akselereres gjennom et potensialsprang på 1 volt. Vis at 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J. Hva blir energiøkningen når elektronet akselereres i et potensialsprang på 10 V, 50 kV $= 5 \times 10^4$ V og 1 MV $= 10^6$ V ? Beregn hastigheten elektronene får etter akselerasjon i potensialene nevnt ovenfor når utgangshastigheten er $v_0 = 0$.

Svar: Energiøkningen ΔE fra akselerasjon av en ladning e over en potensialforskjell U er gitt ved den kinetiske energien ladningen får, $\Delta E = eU$. Med elektronets ladning $e = 1.602\times 10^{-19}$ C og et potensiale på $U = 1$ volt, gir dette en energi på $\Delta E = 1.602 \times 10^{-19}$ C $\cdot$ 1 V $=$ 1.602×10^{-19} J som er definert som 1 eV. Altså er energiøkningene $\Delta E = 10$ eV, $\Delta E = 50$ keV og $\Delta E = 1$ MeV i elektronvoltenheten for de tre potensialsprangene.

Hastigheten v etter disse akselerasjonene er gitt fra den relativistiske formelen for energi, $E = \gamma m_e c^2$, hvor

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \tag{1}$$

Totalenergien er også gitt fra den kinetiske energien K (som kommer fra akselerasjonen gjennom potensialspranget) pluss hvileenergien $m_e c^2$, $E = K + m_e c^2 = eU + m_e c^2$. De to uttrykkene kan løses for hastigheten v:

$$\frac{v(E)}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{E}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{eU + m_e c^2}\right)^2}. \tag{2}$$

Dette gir følgende hastigheter:

$$\begin{aligned}
v(10\,\mathrm{eV}) &= \sqrt{1 - \left(\frac{0.511 \text{ MeV}}{10 \text{ eV} + 0.511 \text{ MeV}}\right)^2}\, c = 6.3 \times 10^{-3}\, c, \\
v(50\,\mathrm{keV}) &= \sqrt{1 - \left(\frac{0.511 \text{ MeV}}{50 \text{ keV} + 0.511 \text{ MeV}}\right)^2}\, c = 0.41\, c, \\
v(10\,\mathrm{MeV}) &= \sqrt{1 - \left(\frac{0.511 \text{ MeV}}{10 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV}}\right)^2}\, c = 0.941\, c.
\end{aligned}$$

Hvis vi i stedet regner ikke-relativistisk på hastigheten så er den kinetiske energien $K = \frac{1}{2} m v^2$, slik at hastigheten blir

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}. \tag{3}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} v(10\,\text{eV}) &= \sqrt{2 \cdot 10 \text{ eV}/0.511 \text{ MeV}} = 6.3 \times 10^{-3}\,c, \\ v(50\,\text{keV}) &= \sqrt{2 \cdot 50 \text{ keV}/0.511 \text{ MeV}} = 0.44\,c, \\ v(10\,\text{MeV}) &= \sqrt{2 \cdot 1 \text{ MeV}/0.511 \text{ MeV}} = 1.98\,c. \end{aligned}$$

Det vil si i det siste tilfellet en hastighet større en lyshastigheten c, som jo må være feil!

b) Beregn den potensielle energien for to partikler med ladning $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C som befinner seg i en avstand 0.1 nm $= 10^{-10}$ m. Vis at enheten elektronvolt er en naturlig enhet i dette tilfelle.

Svar: Den potensielle energien mellom to partikler med ladning e og i avstand r er gitt ved

$$V_e = k_e \frac{e^2}{r}, \tag{4}$$

hvor $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ er Coulomb konstanten. Dette gir en energi på

$$V_e = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{10^{-10} \text{ m}} = 2.3 \times 10^{-18} \text{ J}. \tag{5}$$

I elektronvolt er dette $V_e = 14.4$ eV, slik at elektronvolt er en naturlig enhet i denne situasjonen.

c) La oss anta at de to partiklene ovenfor er et proton og et elektron. Diskutér forholdet mellom gravitasjons- og elektrostatisk potensiell energi i dette tilfelle. (Gravitasjonskonstanten: $G_N = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.)

Svar: Potensiell energi fra gravitasjon blir

$$\begin{aligned} V_g &= G_N \frac{m_e m_p}{r} \\ &= 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot \frac{9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}}{10^{-10} \text{ m}} \\ &= 1.0 \times 10^{-57} \text{ J}, \end{aligned} \tag{6}$$

slik at forholdet mellom de to potensielle energiene er

$$\frac{V_g}{V_e} = \frac{1.0 \times 10^{-57} \text{ J}}{2.3 \times 10^{-18} \text{ J}} = 4.3 \times 10^{-40}. \tag{7}$$

Den gravitasjonelle potensielle energien er forsvinnende liten i forhold til den elektrostatiske.

d) Beregn hvileenergien for elektronet og protonet. Under hvilke betingelser må vi regne med relativistiske effekter?

Svar: Elektron: $E_0 = m_e c^2 = 0.511$ MeV, proton: $E_0 = m_p c^2 = 938.3$ MeV. Relativistiske effekter oppstår dersom avstanden mellom partiklene blir så liten at den potensielle energien vi har regnet ut over blir signifikant i forhold til hvileenergien. For elektronet må vi for eksempel ned på avstander rundt 10^{-14} m, eller 10 fm, for protonet enda mindre.

Oppgave 2 Integralkortslutning Noen integraler er vanskelige, noen integraler er onde, noen integraler er umulige, men det er også en hel del integraler som er superenkle. I alle fall om du tenker deg om litt. I denne oppgaven er det meningen at du tenker før du integrerer, og gjør alle deloppgavene på en linje.

i) $$\int_a^a \frac{x^2 e^{-\sin x}}{\cosh x}\, dx \tag{8}$$

Svar: Dette så jo komplisert ut, men legg merke til integrasjonsgrensene. Vi har et bestemt integral fra $x = a$ til $x = a$, noe som ikke kan gi noe bidrag som helst (husk at et integral først og fremst er et areal under en kurve). Vi har altså med en gang

$$\int_a^a \frac{x^2 e^{-\sin x}}{\cosh x}\, dx = 0. \tag{9}$$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx \tag{10}$$

Svar: Her er formen på integranden viktig. xe^{-x^2} er antisymmetrisk under et ombytte av $x \to -x$: $xe^{-x^2} \to (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2}$. Vi vet fra kalkulus at alle bestemte integral med antisymmetrisk integrand hvor integrasjonsgrensene er symmetriske (om det punktet integranden er antisymmetrisk), gir null. Sagt på et mer matematisk språk

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx &\overset{x \to -x}{=} \int_{\infty}^{-\infty} -xe^{-x^2}\,(-1)dx \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} xe^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = -I. \end{aligned} \tag{11}$$

Siden $I = -I$ betyr at $I = 0$, så må integralet være null.

iii) $$\int_{-a}^{a} |x|\, dx \tag{12}$$

Svar: Her er poenget at integranden (og integralgrensene) er symmetrisk om $x = 0$. Det vil si at vi får et like stort bidrag fra positive x som negative, altså blir

$$\int_{-a}^{a} |x|\, dx = 2\int_{0}^{a} |x|\, dx = 2\int_{0}^{a} x\, dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = a^2. \tag{13}$$

iv) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \tag{14}$$

Svar: Igjen har vi en symmetrisk integrand, ved $x \to -x$ så blir $\cos x \to \cos(-x) = \cos x$, slik at

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2[1-0] = 2. \tag{15}$$

v) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx \tag{16}$$

Svar: Til tross for likheten med forrige oppgave har vi her med en antisymmetrisk integrand å gjøre på grunn av den ekstra x faktoren som er antisymmetrisk. Vi minner om at produktet av en antisymmetrisk og en symmetrisk faktor er antisymmetrisk. Integralet må derfor bli null.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = 0. \tag{17}$$

vi) $$\int_{-a}^{a} x(x-b)(x+b)e^{-cx^2}\, dx \tag{18}$$

Svar: Dette ser også rimelig komplisert ut. Det er imidlertid nok et lite lurespørsmål. Husk at $(x-b)(x+b) = x^2 - b^2$, som er en symmetrisk faktor. e^{-cx^2} er også symmetrisk, mens x er antisymmetrisk. Produktet av alle tre er da antisymmetrisk, og integralet må (igjen!) bli null:

$$\int_{-a}^{a} x(x-b)(x+b)e^{-cx^2}\, dx = 0. \tag{19}$$

Oppgave 3 Lineæralgebra I lineæralgebra definerer man et **indreprodukt** mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som en generalisering av det velkjente skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$. For å unngå sammenblanding med notasjonen til det gamle skalarproduktet kan vi begynne å skrive indreproduktet som $\langle u|v\rangle$, hvor vi har droppet å skrive vektorpilen for enkelhets skyld (en forklaring på denne skrivemåten kommer senere i kurset). Et indreprodukt må oppfylle følgende egenskaper (hvor k_1 og k_2 er to tall som generelt kan være komplekse):

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*, &(20)\\ &\text{ii)} \quad \langle u|(k_1 v + k_2 w)\rangle = k_1\langle u|v\rangle + k_2\langle u|w\rangle, &(21)\\ &\text{iii)} \quad \langle u|u\rangle \geq 0, \ \text{og } \langle u|u\rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \vec{u} = 0. &(22)\end{aligned}$$

Bruk dette til å vise at den følgende definisjonen oppfyller alle kravene til et indreprodukt for to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$:

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx, \tag{23}$$

dersom de involverte integralene finnes (ikke er uendelige).

Konsekvensen av det du her viser er at funksjoner kan fungere som element i et abstrakt vektorrom, de er en form for vektorer de også! Vi nevner tilslutt at for at integralet i indreproduktet (23) skal finnes så er det tilstrekkelig at

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{og} \quad \int_a^b |g(x)|^2\,dx < \infty. \tag{24}$$

Vi sier da at funksjonene f og g er **kvadratisk integrerbare** på intervallet $[a, b]$.

Svar: Vi begynner med å vise egenskap i):

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx \\ &= \left(\int_a^b f(x)g^*(x)\,dx\right)^* \\ &= \left(\int_a^b g^*(x)f(x)\,dx\right)^* \\ &= \langle f|g\rangle^*. \end{aligned} \tag{25}$$

Egenskap ii) kan vises som ved hjelp av en tredje funksjon $h(x)$:

$$\begin{aligned} \langle f|k_1 g + k_2 h\rangle &= \int_a^b f^*(x)(k_1 g(x) + k_2 h(x))\,dx \\ &= k_1\int_a^b f^*(x)g(x))\,dx + k_2\int_a^b f^*(x)h(x)\,dx \\ &= k_1\langle f|g\rangle + k_2\langle f|h\rangle. \end{aligned} \tag{26}$$

Det er viktig her at alle integralene som er involvert faktisk er endelig. Hvis ikke har jeg ikke uten videre lov til å dele de opp på den måten jeg gjør.

For den siste egenskapen så kan vi legge merke til at

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b f^*(x)f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{27}$$

Siden $|f(x)|^2 \geq 0$ for alle verdier av x så må dette integralet være positivt eller null. Altså må $\langle f|f\rangle \geq 0$. Det er bare eksakt null dersom $f(x) = 0$.[1] Vi må derfor tolke funksjonen $f(x) = 0$ som en nullvektor i dette vektorrommet.

[1] OK da, så bløffer jeg litt her. For de matematisk interesserte så må jeg inrømme at det ikke er *helt* sant. $f(x)$ kan nemlig være forskjellig fra null i enkeltpunkter, og integralet vil fortsatt være null. Faktisk så kan den være forskjellig fra null i uendelig mange punkter så lenge det er et tellbart antall. Vi sier at alle funksjoner som er like bortsett fra i et tellbart (uendelig) antall punkter er i samme **ekvivalensklasse**, og disse regnes med i samme vektor.