Løsningsforslag
Kollokvium 2

30. januar 2015

Her finner dere et løsningsforslag for oppgavene som ble diskutert på Kollokvium 2.

Oppgave 1 Statistikk

Vi betrakter den gaussiske sannsynlighetsfordelingen

$$\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}, \tag{1}$$

hvor A, a og λ er positive reelle konstanter. Slå opp integraler du behøver i Rottmann.

a) Bruk kravet om bevaring av sannsynlighet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1, \tag{2}$$

til å bestemme A.

Svar: Vi har at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\lambda(x-a)^2} dx = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} dy, \tag{3}$$

med substituasjonen $y = x - a$. Fra Rottmann er

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{4}$$

for $\lambda > 0$, slik at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{5}$$

Fra ligning (2) må

$$A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1, \tag{6}$$

og vi får $A = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$.

b) Finn forventningsverdien til x

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx, \tag{7}$$

forventningsverdien til x^2

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\, dx, \tag{8}$$

og standardavviket $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

Svar:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x-a)^2}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y+a)e^{-\lambda y^2}\,dy, \qquad (9)
\end{aligned}$$

igjen med substitusjonen $y = x - a$. Dette gir

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\lambda y^2}\,dy + a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}\,dy\right) \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(0 + a\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right) \\
&= a, \qquad (10)
\end{aligned}$$

hvor vi igjen har brukt Rottmann og at

$$\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\lambda y^2}\,dy = 0, \qquad (11)$$

fordi integranden bytter fortegn når variablen bytter fortegn, en såkalt **odde integrand**, eller **anti-symmetrisk integrand**. For odde integrander vil integralet, så lenge integrasjonsgrensene er symmetriske om det punktet integranden er odde rundt (her $x = 0$), alltid bli null!

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}e^{-\lambda(x-a)^2}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y+a)^2e^{-\lambda y^2}\,dy \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\lambda y^2}\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} 2aye^{-\lambda y^2}\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} a^2e^{-\lambda y^2}\,dy\right) \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\lambda y^2}\,dy + a^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}\,dy\right) \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\lambda y^2}\,dy + a^2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right), \qquad (12)
\end{aligned}$$

igjen med substitusjonen $y = x - a$ og det faktum at det ene integralet har en odde integrand (som over). Det gjenstående integralet kan vi finne ved først å innse at integranden er symmetrisk om $y = 0$, slik at

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2e^{-\lambda y^2}\,dy = 2\int_{0}^{\infty} y^2e^{-\lambda y^2}\,dy, \qquad (13)$$

og deretter bruke fra Rottmann at

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right), \tag{14}$$

for $k > -1$ og $\lambda > 0$, som med $k = 2$ gir

$$\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-\lambda y^2} dy = 2\cdot\frac{1}{2}\lambda^{-\frac{2+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) = \lambda^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{15}$$

når vi bruker at $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ slik at $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, og at $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.[1] Dette gir tilslutt

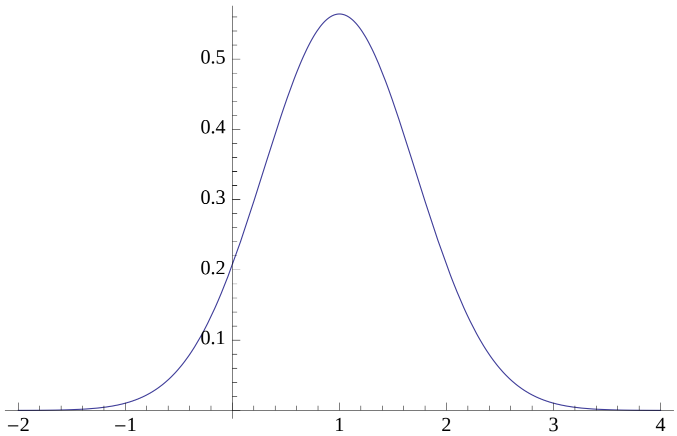
$$\langle x^2\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\left(\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + a^2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right) = \frac{1}{2\lambda} + a^2. \tag{16}$$

Standardavviket kan nå lett finnes som

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda} + a^2 - a^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}. \tag{17}$$

c) Tegn grafen til $\rho(x)$.

Svar: Grafen til $\rho(x)$ er tegnet i figur 1.



Figur 1: $\rho(x)$ med $a = 1$ og $\lambda = 1$.

[1]Disse uttrykkene og verdier for Gamma-funksjonen Γ kan også finnes i Rottmann. Dersom du ikke har hørt det før: Gamma-funksjonen er en generalisering av fakultet til å også inkludere tall som ikke er heltall. For et heltall n så er $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Oppgave 2 Differensialligninger

En vanlig teknikk for å løse (partielle) differensialligninger er såkalt **separasjon av variable**. Dette er nyttig for oss fordi det meste av FYS2140 går ut på å løse nettopp en bestemt slik ligning, Schrödingerligningen. Vi skal her, som en oppvarming, se på et annet ofte brukt eksempel, som er ligningen:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

hvor du skal finne funksjonen $u(x,t)$ gitt noen grensebetingelser: $u(x,0) = f(x)$, og $u(0,t) = 0$ og $u(L,t) = 0$.

Dette ikke et tilfeldig matematisk uttrykk. Denne ligningen har en viktig fysisk betydning: det er **varmeledningsligningen** som beskriver hvordan temperaturen $u(x,t)$ i en stang med lengde L endrer seg med posisjonen x og tiden t. Konstanten a er den såkalte diffusjonskonstanten.[2] Grensebetingelsene i problemet forteller oss hvordan temperaturen i stangen er ved tiden $t = 0$ gjennom funksjonen $f(x)$ og at temperaturen i endene av stangen ($x = 0$ og $x = L$) holdes på 0° C gjennom kontakt med et annet materiale.[3]

Ved separasjon av variable antar vi at en løsningen på problemet kan skrives som et produkt av to (eller flere) funksjoner som hver bare avhenger av en av variablene. Her vil vi bruke de to funksjonenen $X(x)$ og $T(t)$, og antar at vi kan skrive løsningen som

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{19}$$

Vi forsøker så å dele ligningen inn i to deler som hver bare avhenger av en av variablene x og t.

a) Vis at når vi setter (19) inn i (18) så får vi

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{aT(t)}\frac{dT(t)}{dt}. \tag{20}$$

Svar:

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\
a\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)T(t) &= \frac{\partial}{\partial t}X(x)T(t) \\
aT(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} \\
\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} &= \frac{1}{aT(t)}\frac{\partial T(t)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{21}$$

---

[2]For spesielt interesserte er den gitt som $a = \kappa/\rho s$, hvor κ den termiske ledeevnen til stangen, ρ er massetettheten i materialet og s er den spesifikke varmekapasiteten.

[3]Vi kunne selvsagt valgt en annen vilkårlig konstant temperatur her.

Fordi vi kan velge å endre en variabel, x eller t, om gangen, så må hver side av ligningen være konstant. Denne konstanten kaller vi for $-\sigma$. Vi kan nå løse de to ligningene:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\sigma \quad \text{og} \quad \frac{1}{aT(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\sigma. \tag{22}$$

b) Vis at ligningen for tidsavhengigheten har løsningen

$$T(t) = Ce^{-a\sigma t}, \tag{23}$$

hvor C er en vilkårlig konstant. Hvorfor kan vi uten problem sette $C = 1$?

Svar: Vi løser ved å separere differensialene og integrere begge sidene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{aT}\frac{dT}{dt} &= -\sigma \\
\frac{1}{T}dT &= -a\sigma dt \\
\int \frac{1}{T}dT &= -\int a\sigma dt \\
\ln T &= -a\sigma t + C' \\
e^{\ln T} &= e^{-a\sigma t + C'} \\
T(t) &= Ce^{-a\sigma t},
\end{aligned} \tag{24}$$

hvor $C = e^{C'}$ er en vilkårlig integrasjonskonstant. Vi kan sette $C = 1$ her fordi vi kan absorbere enhver konstant inn i funksjonen X.

c) Det viser seg at vi må ha $\sigma > 0$ i fysiske løsninger, kan du forklare hvorfor det må være tilfelle? *Hint:* Tenk på de fysiske konsekvensene av $\sigma < 0$.

Svar: Dersom $\sigma < 0$ så er $T(t)$ en eksponentielt økende funksjon (a må være positiv). Vi vet at det ikke kan være tilfelle fysisk fordi endene av stangen holdes ved temperaturen $0°$ C, da kan ikke temperaturen inne i stangen bare øke og øke, den må gå mot null over tid, noe den gjør dersom $\sigma > 0$.

Vi lærte i Oblig 1 (Oppgave 2c) at ligningen for $X(x)$ har løsningene

$$X(x) = A\sin(\sqrt{\sigma}x) + B\cos(\sqrt{\sigma}x). \tag{25}$$

d) Bruk grensebetingelsene for endene av stangen for å bestemme B og σ, og vis at vi får løsningen

$$u(x,t) = A\sin(n\pi x/L)e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

Svar: Grensebetingelsen krever $u(0,t)=0$ og $u(L,t)=0$. Vi har at

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = (A\sin(\sqrt{\sigma}\cdot 0) + B\cos(\sqrt{\sigma}\cdot 0))T(t) \\ &= (A\sin 0 + B\cos 0)T(t) = BT(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Siden $T(t) \neq 0$ så må $B = 0$. Vi har også at

$$u(L,t) = X(L)T(t) = A\sin(\sqrt{\sigma}L)T(t). \tag{28}$$

For at dette skal bli null så må $\sin(\sqrt{\sigma}L) = 0$, noe som er tilfelle bare dersom $\sqrt{\sigma}L = n\pi$, eller $\sigma = n^2\pi^2/L^2$, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. $n = 0$ er en uinteressant løsning fordi den gir $X(x) = 0$ og dermed $u(x,t) = 0$. Altså må

$$X(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{29}$$

og

$$T(t) = e^{-a\sigma t} = e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \tag{30}$$

og dermed er

$$u(x,t) = A\sin(n\pi x/L)e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \tag{31}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi har nå funnet en *spesifikk* løsning av varmeledningsligningen ved bruk av separasjon av variable teknikken, men du lurer kanskje på hvordan man finner den generelle løsningen, som slett ikke trenger la seg separerer slik som vi anntok i (19)? Eller hvordan man finner en løsning som oppfyller grensebetingelsen $u(x,0) = f(x)$ for en vilkårlig funksjon $f(x)$? Her kommer Fouriers teorem oss til unnsetning, dette sier at vi kan gjenskape funksjonen $f(x)$ ved en uendelig sum av sinusfunksjoner,[4] altså spesifikke løsninger med forskjellig n. Uten at vi vil diskutere dette i mer detalj her blir den generelle løsningen den uendelige summen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L)e^{-an^2\pi^2 t/L^2}, \tag{32}$$

hvor A_n velges slik at $u(x,0) = f(x)$. I praksis, hvis vi skal se på et konkret varmeledningsproblem, så blir det et spørsmål om hvor mange ledd av denne uendelige summen vi trenger for å gjenskape $u(0,x) = f(x)$ godt nok.

[4] I alle fall så lenge $f(x)$ oppfører seg pent nok.