Løsningsforslag
Kollokvium 6

25. februar 2015

Her finner dere et løsningsforslag for oppgavene som ble diskutert på Kollokvium 6.

Oppgave 1 Diskusjonsoppgave

Diskuter følgende spørsmål med hverandre og prøv å bli enige om noen svar:

a) Hva betyr det at en tilstand er en egentilstand for en operator?

Svar: En egentilstand Ψ til en operator $\hat{Q}$ er en funksjon som oppfyller ligningen

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi, \tag{1}$$

hvor q er et tall (muligens komplekst). q kalles den tilhørende (til Ψ) egenverdien.

b) Kan en tilstand være en egentilstand for både operatoren $\hat{x}$ og operatoren $\hat{p}$ samtidig?

Svar: Nei. Grunnen er at de to operatorene ikke kommuterer. Vi har sett på forelesning at $[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$. La oss anta at Ψ er en egentilstand til $\hat{p}$, altså at det finnes ett tall q slik at

$$\hat{p}\Psi = q\Psi, \tag{2}$$

og Ψ samtidig er en egentilstand til $\hat{x}$ med egenverdi a,

$$\hat{x}\Psi = a\Psi. \tag{3}$$

Da er

$$\hat{x}\hat{p}\Psi = \hat{x}q\Psi = q\hat{x}\Psi = qa\Psi, \tag{4}$$

men samtidig må

$$\hat{x}\hat{p}\Psi = (\hat{p}\hat{x} + i\hbar)\Psi = \hat{p}\hat{x}\Psi + i\hbar\Psi = a\hat{p}\Psi + i\hbar\Psi = qa\Psi + i\hbar\Psi. \tag{5}$$

Dette er en selvmotsigelse, altså må antagelsen om samtidig egenfunksjon være feil.

c) Hva kan vi vite om målinger på tilstander som *ikke* er egentilstander til en bestemt hermitisk operator som tilhører en observabel?

Svar: Dersom Ψ *ikke* er en egentilstand til operatoren $\hat{Q}$ som tilhører observabelen Q så vet vi fortsatt at vi får egenverdiene til $\hat{Q}$ når vi måler Q (med forskjellige sannsynligheter). Siden dette ikke er bare en verdi vet vi at spredningen på målingene er forskjellig fra null. Altså er ikke Q skarpt bestemt for tilstanden.

Oppgave 2 Gøy med lineæralgebra

I lineæralgebra definerer man et **indreprodukt** mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som en generalisering av det velkjente skalarproduktet $\vec{u}\cdot\vec{v}$. For å unngå sammenblanding med notasjonen til det gamle skalarproduktet kan vi begynne å skrive indreproduktet som $\langle u|v\rangle$, hvor vi har droppet å skrive vektorpilen for enkelhets skyld. Et indreprodukt må oppfylle følgende egenskaper (hvor k_1 og k_2 er to, muligens komplekse, tall):

$$\text{i)} \quad \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*, \tag{6}$$

$$\text{ii)} \quad \langle u|(k_1 v + k_2 w)\rangle = k_1\langle u|v\rangle + k_2\langle u|w\rangle, \tag{7}$$

$$\text{iii)} \quad \langle u|u\rangle \geq 0, \text{ og } \langle u|u\rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \vec{u} = 0. \tag{8}$$

Bruk dette til å vise at den følgende definisjonen oppfyller alle kravene til et indreprodukt for to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$:

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx, \tag{9}$$

dersom de involverte integralene finnes (ikke er uendelige).[1]

Svar: Vi begynner med å vise egenskap i):

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)\,dx \\
&= \left(\int_a^b f(x)g^*(x)\,dx\right)^* \\
&= \left(\int_a^b g^*(x)f(x)\,dx\right)^* \\
&= \langle f|g\rangle^*.
\end{aligned} \tag{11}$$

Egenskap ii) kan vises som ved hjelp av en tredje funksjon $h(x)$:

$$\begin{aligned}
\langle f|k_1 g + k_2 h\rangle &= \int_a^b f^*(x)(k_1 g(x) + k_2 h(x))\,dx \\
&= k_1 \int_a^b f^*(x)g(x))\,dx + k_2 \int_a^b f^*(x)h(x)\,dx \\
&= k_1\langle f|g\rangle + k_2\langle f|h\rangle.
\end{aligned} \tag{12}$$

Det er viktig her at alle integralene som er involvert faktisk er endelig. Hvis ikke har jeg ikke uten videre lov til å dele de opp på den måten jeg gjør.

[1]Vi nevner at det er tilstrekkelig for at integralet i indreproduktet (9) skal finnes at

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{og} \quad \int_a^b |g(x)|^2\,dx < \infty. \tag{10}$$

Vi sier da at funksjonene f og g er **kvadratisk integrerbare**.

For den siste egenskapen så kan vi legge merke til at

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b f^*(x)f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \tag{13}$$

Siden $|f(x)|^2 \geq 0$ for alle verdier av x så må dette integralet være positivt eller null. Altså må $\langle f|f\rangle \geq 0$. Det er bare eksakt null dersom $f(x) = 0$.[2] Vi må derfor tolke funksjonen $f(x) = 0$ som en nullvektor i dette vektorrommet.

Oppgave 3 Mer gøy med lineæralgebra

Har du tenkt over at både vektorer og matriser godt kan bestå av komplekse tall? For vektorer er det nok å utvide definisjonen av (det euklidske) skalarproduktet mellom to n-dimensjonale vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ til å være

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = w_1^* v_1 + w_2^* v_2 + \ldots + w_n^* v_n. \tag{14}$$

I lineæralgebra har vi sett **symmetriske matriser** hvor den transponerte av matrisen er den samme, altså at gitt en matrise A så er $A^T = A$. Dette begrepet kan utvides til såkalte **hermitiske matriser**. Vi definerer den **hermitisk konjugerte** matrisen $A^\dagger$ som den matrisen du får når du både transponerer og komplekskonjugerer tallene i matrisen, altså er $A^\dagger = (A^T)^*$. En hermitisk matrise A har da $A^\dagger = A$.

Vis at de såkalte **spinn-matrisene**

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

er hermitiske, finn $\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2$ og vis at den også er hermitisk.

Svar: Vi begynner med å vise at matrisene er hermitiske ved å finne den hermitisk konjugerte,

$$\hat{S}_1^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{S}_1, \tag{16}$$

$$\hat{S}_2^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \hat{S}_2, \tag{17}$$

$$\hat{S}_3^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^\dagger = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{S}_3. \tag{18}$$

[2] OK da, så bløffer jeg litt her. For de matematisk interesserte så må jeg inrømme at det ikke er *helt* sant. $f(x)$ kan nemlig være forskjellig fra null i enkeltpunkter, og integralet vil fortsatt være null. Faktisk så kan den være forskjellig fra null i uendelig mange punkter så lenge det er et tellbart antall. Vi sier at alle funksjoner som er like bortsett fra i et tellbart (uendelig) antall punkter er i samme **ekvivalensklasse**, og disse regnes med i samme vektor.

Så finner vi $\hat{S}^2$:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}^2 &= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{3\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\hat{I},
\end{aligned} \tag{19}
$$

hvor $\hat{I}$ er identitetsmatrisen. Dette betyr at $\hat{S}^2$ også er hermitisk fordi

$$(\hat{S}^2)^\dagger = \frac{3\hbar^2}{4}\hat{I}^\dagger = \frac{3\hbar^2}{4}\hat{I} = \hat{S}^2. \tag{20}$$

Du klarer sikkert også å vise at summen av hermitiske matriser med reelle koeffisienter, og produktet av hermitiske matriser alltid er hermitiske?

Fortsett med å vise at

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

er egenvektorer til både $\hat{S}_3$ og $\hat{S}^2$, og finn egenverdiene. Dersom spinnmatrisene er de hermitiske operatorene til observable størrelser, hva betyr dette for målinger av disse observablene?

Svar:

$$\hat{S}_3\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \tag{22}$$

og

$$\hat{S}_3\chi_- = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{23}$$

altså er χ_+ og χ_- egenvektorer til $\hat{S}_3$ med egenverdier $\hbar/2$ og $-\hbar/2$. Videre er

$$\hat{S}^2\chi_+ = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\chi_+, \tag{24}$$

og

$$\hat{S}^2\chi_- = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\chi_-, \tag{25}$$

altså er χ_+ og χ_- egenvektorer til $\hat{S}^2$, begge med egenverdi $3\hbar^2/4$.

Dersom spinn-matrisene er de hermitiske operatorene til observable størrelser (og det vil det vise seg at de er), så betyr det at egenverdiene over er de eneste verdiene vi kan måle for disse observablene. En 2×2-matrise har maksimalt to (lineært uavhengige) egentilstander og to egenverdier.

Som en skikkelig utfordring til de som har lyst lar vi de følgende tre utsagnene stå ubevist til slutt:

1. Egenverdiene til en hermitisk matrise er alltid reelle.

2. Egenvektorene til en hermitisk matrise som tilhører forskjellige egenverdier er alltid ortogonale.

3. For en hermitisk matrise A og to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er skalarproduktet $\vec{w} \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{w}) \cdot \vec{v}$.

Fortvil ikke om du ikke får til å bevise dette, men let gjerne opp et bevis i en lærebok eller på nettet. Ser du sammenhengen mellom de tre punktene over, og det du vet om hermitiske operatorer?