Kollokvium 9
Harmonisk oscillator

9. april 2015

For å repetere litt fra før påske skal vi i dette kollokviet skal vi se mer på den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren. Under gir vi tre oppgaver som dere kan prøve dere på. Den siste glir over i det som blir tema mye av tiden etter påske: kvantemekanikk i mer enn en dimensjon. Jobb gjerne sammen.

Den første oppgaven er en diskusjonsoppgave om løsninger av Schrödingerligningen for et harmonisk oscillator potensiale. I den andre oppgaven ser vi på forventningsverdier for den generelle n-te stasjonære tilstanden for en harmonisk oscillator. Dette høres kanskje vanskelig ut, men vi skal se på et meget elegant triks for å gjøre jobben som innvolverer stigeoperatorene. Den siste oppgaven ser litt på harmonisk oscillator i to dimensjoner.

Oppgave 1 Diskusjonsoppgave

Diskuter følgende spørsmål med hverandre og prøv å bli enige om noen svar:

a) Hva slags forventningsverdier for bevegelsesmengde kan de stasjonære tilstandene til en harmonisk oscillator ha? Ikke regn på dette, det finnes et enkelt svar, men forklar hvorfor.

b) Med tanke på svaret i **a)**, hvorfor kan ikke de enkelte stasjonære tilstandene alene beskrive en makroskopisk oscillator som du kan se svinger frem og tilbake? Hva må du gjøre for å beskrive et slikt system?

c) Hva er sannsynlighetstettheten i $x = 0$ for en harmonisk oscillator i tilstanden ψ_n, hvor n er et odde tall? Er det rart? *Hint:* Ja!

Oppgave 2 Triks og lureri med stigeoperatorer

Med stigeoperatorer kan vi utføre et vakkert triks for å finne integralene til forskjellig forventningsverdier. Vis først at vi kan skrive

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \quad \text{og} \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \tag{1}$$

Vi kan nå enkelt finne integralet

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n \, dx &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)\psi_n \, dx \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* \hat{a}_+ \psi_n + \psi_n^* \hat{a}_- \psi_n) \, dx \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{n+1}\psi_n^* \psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_n^* \psi_{n-1}) \, dx \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

hvor vi har brukt at ψ_n og ψ_{n+1} og ψ_{n-1} er ortogonale funksjoner i den siste linjen.

Bruk dette til å finne $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ og $\langle K \rangle$, for den n-te stasjonære tilstanden til en harmonisk oscillator. Sjekk at uskarphetsprinsippet holder.

Oppgave 3 En dimensjon til

Vi kan se på en harmonisk oscillator i to dimensjoner hvor potensialet er gitt ved

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2). \tag{3}$$

a) Sett opp den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i potensialet over, beskrevet ved bølgefunksjonen $\psi(x, y)$.

b) Hva er enheten til $|\psi(x, y)|^2$?

c) Angi normeringsbetingelsen for $\psi(x, y)$.

d) Bruk teknikken med separasjon av variable for posisjonskoordinatene til bølgefunksjonen, $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$, til å vise at den tidsuavhengige Schrödingerligningen for vårt potensial kan reduseres til to uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger.

e) Vis at de tillatte energiene er gitt ved

$$E_n = \hbar\omega\,(n + 1)\,, \tag{4}$$

og angi hva slags verdier som er mulig for n.