Forelesning 14

Are Raklev

Kort repetisjon

- HO TUSL kan skrives enhetsløst som

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi(\xi), \quad \xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\,x$$

- Analytisk løsning av HO TUSL gir

$$\psi(\xi) = h(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

hvor funksjonen h finnes som

$$h(\xi) = \sum_j a_j \xi^j, \quad a_{j+2} = \frac{2j - K + 1}{(j+2)(j+1)} a_j$$

Kort repetisjon

- Grensebetingelsene krever at $a_0 = 0$ eller $a_1 = 0$, og at rekken må kuttes av etter j = n, som betyr at

$$K = 2n+1, \quad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$a_{j+2} = \frac{2j-2n}{(j+2)(j+1)}a_j$$

- Analytisk løsning av HO TUSL viser at energikvantiseringen er en konsekvens av **grensebetingelser** (her: oppførsel når $|x| \rightarrow \infty$).

I dag

- Siste rest av HO: Hermite polynomer
- Bundne tilstander og spredningstilstander.
- Fri partikkel (en spredningstilstand).

Hermite polynomer

- HO TUSL løsninger kan skrives ved hjelp av **Hermite** polynomer H_n

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

[H_n definisjon i Griffiths]

$$\psi_n(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(\sqrt{2}\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

[H_n definisjon i Rottmann]

Oppsummering

- **Bundne tilstander** har E < V(∞) og E < V(-∞).
  - I praksis reskaleres V(x) slik at E < 0 er tilstrekkelig.
- Alle andre tilstander er **spredningstilstander**.
- Spredningstilstander kvantiserer ikke energien med grensebetingelser. Løsningen av TASL blir

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk$$

$$\varphi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\Psi(x,0)dx$$