UiO : Fysisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Forelesning 20

Are Raklev

Ukens program

- **Tirsdag:** Hydrogenatomet. (Avsnitt 4.2 i Griffiths)
- **Fredag:** Angulærmoment. (Avsnitt 4.3 i Griffiths)
- **Gruppetimer**: Oblig 9 + tilleggsoppgave 4.14 fra Griffiths. (Vi begynner å se på eksamen!)
- **Kollokvium mandag:** Schrödingers undulatorteori.

Kort repetisjon

- TUSL i tre dimensjoner:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r})+V\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r})$$

- For et **sentralsymmetrisk potensiale**, V(r), f.eks. Coulombpotensialet, er det naturlig å bruke **sfæriske koordinater**.
- Vi finner **separable løsninger** ψ(**r**) = R(r)Y(θ,φ). Resultatet er de **sfæriske harmoniske** $Y_l^m(\theta,\varphi)$ og en **radialligning** for R(r).

Kort repetisjon

- De **sfæriske harmoniske** kan skrives ved hjelp av **Legendrepolynomer**:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \epsilon\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

hvor $\epsilon = (-1)^m$ for $m > 0$ og $\epsilon = 1$ for $m < 0$

- Radialdelen og de sfæriske harmoniske normeres separat

$$\int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 \, dr = 1 \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 1$$

Kort repetisjon

- **Radialligningen**

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)=l(l+1)R$$

kan forenkles ved et variabelbytte u(r) = rR(r), og skrives ved hjelp av et **effektivt potensial**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2}+V_{\text{eff}}u=Eu$$

1D TUSL!

hvor

$$V_{\text{eff}}(r)=V(r)+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$$

Kort repetisjon

- Hydrogen har **Coulombpotensialet**

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \qquad k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ eV nm}$$

som gir radialligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{-k}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = Eu$$

eller

$$\rho = \kappa x, \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]$$

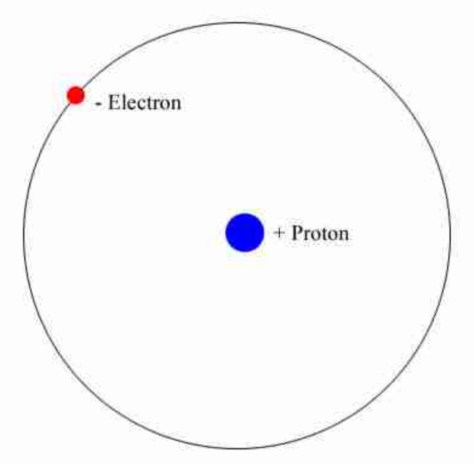
$$\rho_0 = \frac{2}{a_0\kappa}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{mk}$$

I dag

- Vi vil bruke dette matematiske maskineriet på **hydrogenatomet**.
  - Må løse radialligningen for Coulombpotensialet.

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \qquad k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ eV nm}$$

  - Ser etter bundne tilstander, E < 0.



Midtveisevaluering

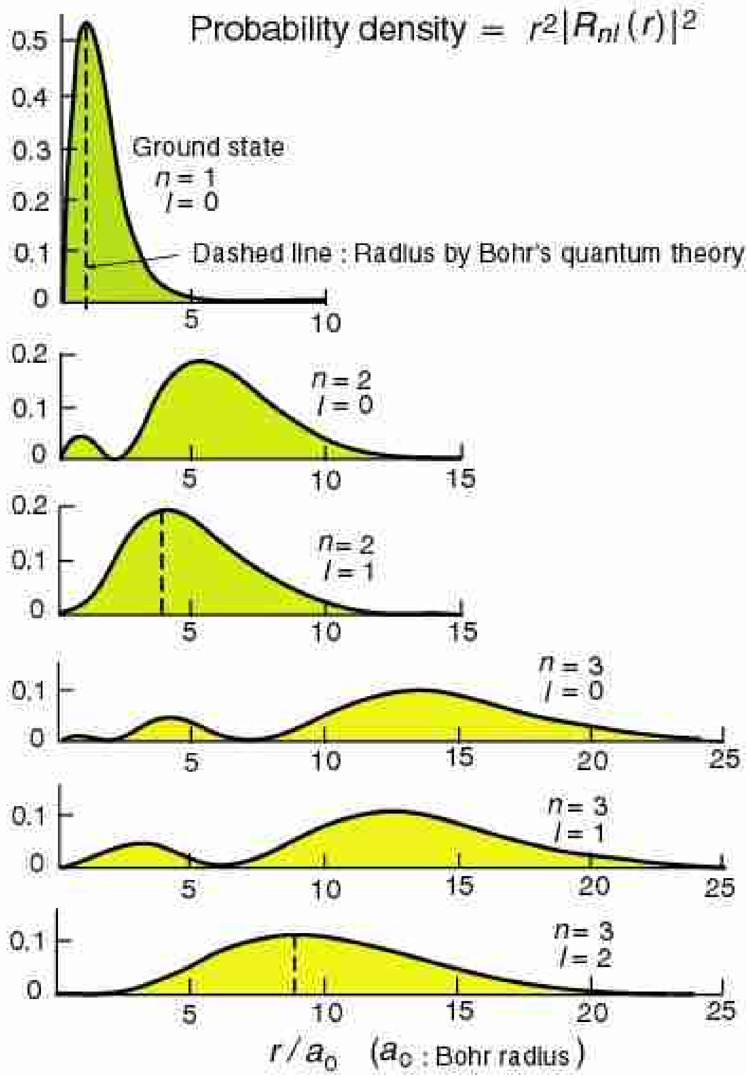
- Om podcast/elektronisk tavle
  - Vanskelig å lese skrift på elektronisk tavle (men enklere å se langt unna).
  - Delte meninger om analog/elektronisk tavle.
  - Mange liker pdfen!
  - Bli bedre til å gjenta spørsmål fra salen.
  - Delte meninger om det går for sakte med elektronisk tavle.

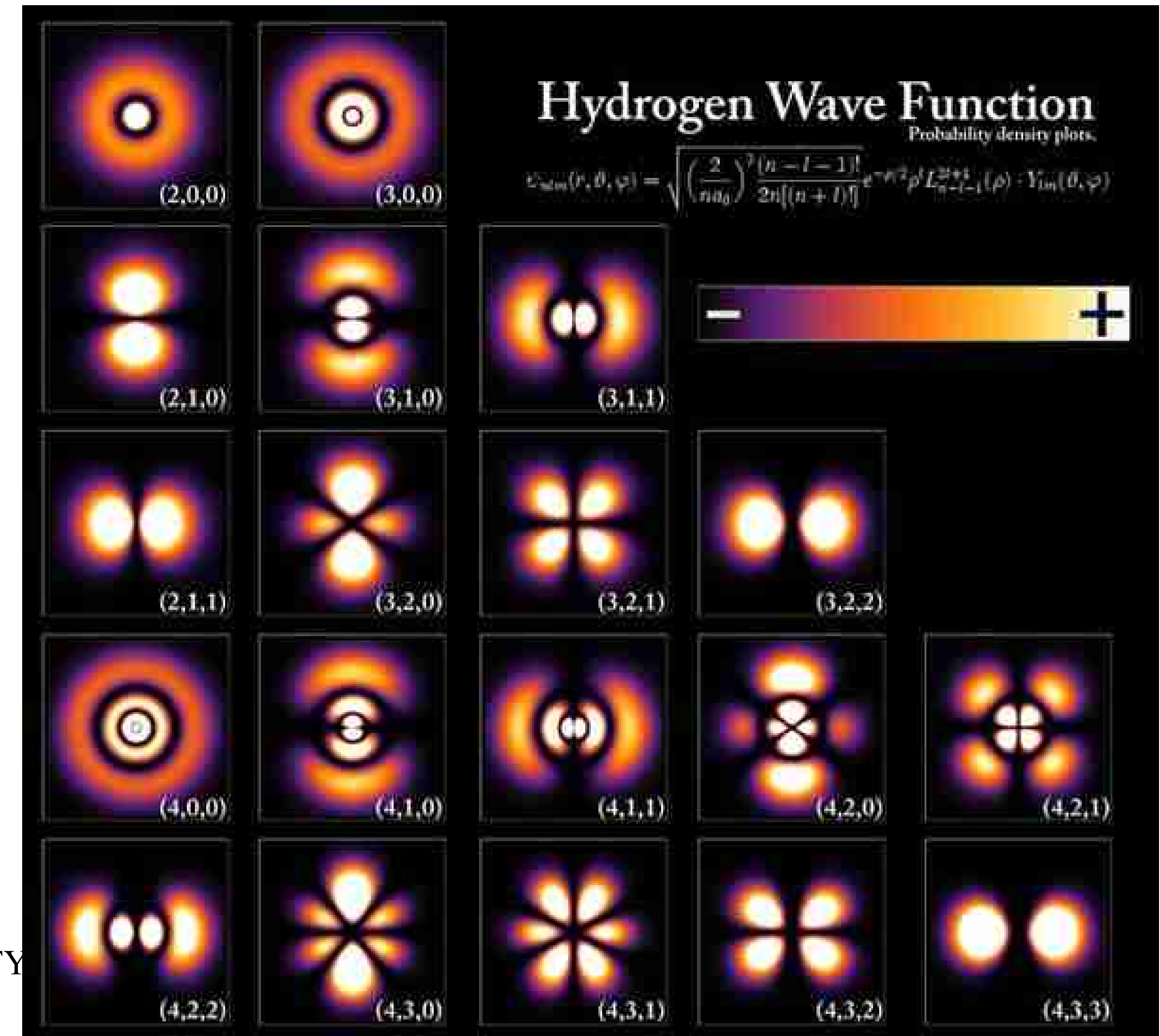
Midtveisevaluering

- Arbeidskrevende obliger.
- Forslag om gruppetimer under midtveis.
- Mer om Diracs deltafunksjon.

Hydrogenatomet

Fig. (C)





Oppsummering

- Vi finner bølgefunksjonen for hydrogenatomet fra løsningene $R_{nl}(r)$ av radialligningen til Coulombpotensialet.
- Løses ved en rekursjonformel som uttrykker radialdelen ved Laguerre polynomer L_q

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

- Gir samme energikvantisering som Bohrs formel.