Operatorer

$\hat{x} = x$ og $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ kalles operatorer.

Formelt en avbildning mellom vektorrom.

Eksempel: $p(x) = 1 + 2x - x^2$

$$\vec{v} = (1, 2, -1, 0, 0, \dots)$$

$$xp \Rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{v}\,' = (0, 1, 2, -1, 0, 0 \dots)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p \Rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{v}\,' = (2, -2, 0, 0, 0, \dots)$$

Forventningsverdi:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, dx$$

En hermitisk operator $\hat{Q}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{Q}\psi)^* \psi \, dx$$

Postulat: Alle <u>observable</u> Q har en hermitisk operator $\hat{Q}$.

Er $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ hermitisk?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p} \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{v}{\psi^*} \underbrace{\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi}_{u'} dx = \cancel{-i\hbar \psi^* \psi \Big|_{-\infty}^{\infty}} - (-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\psi^* \psi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi\right)^* \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}\psi)^* \psi \, dx$$

Fordelaktig konsekvens

$$\langle Q \rangle^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, dx\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, (\hat{Q}\psi)^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{Q}\psi)^* \psi \, dx$$

$$\overset{\hat{Q} \text{ hermitisk}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, dx = \langle Q \rangle$$

må få reelle tall ved observasjoner

Postulat: Bare <u>egenverdier</u> q av $\hat{Q}$ kan være resultat av målinger av Q.

<u>Egenverdiligning</u> $\quad \underbrace{\hat{Q}\psi}_{\text{egenfunksjon/ egenvektor/ egentilstand}} = q\psi$ ← egenverdien

Eksempel: planbølgeløsning $\underline{\psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}}$

egenfunksjon til $\hat{p}$

$$\underline{\hat{p}\psi} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{i(kx-\omega t)} = -i\hbar\, ik\psi = \underbrace{\hbar k}_{\substack{\text{egenverdi} \\ p=\hbar k}}\psi$$

Dersom $\boxed{\hat{Q}\psi = q\psi}$ for en bølgefunksjon ψ som beskriver en bestemt partikkel, så er

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \underline{\hat{Q}\psi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \underline{q\psi}\, dx = q\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = q$$

Observabel	Symbol	Operator
posisjon	$\hat{x}$	x
bevegelsesmengde	$\hat{p}$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
potensiell energi:	$\hat{V}$	$V(x)$
kinetisk energi:	$\hat{K}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
hamiltonian	$\hat{H}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$
total energi:	$\hat{E}$	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

SL som operatorligning

SL $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$

$$\Rightarrow \quad \hat{K}\psi + \hat{V}\psi = \hat{E}\psi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{H}\psi = \hat{E}\psi}$$

hamiltonoperator

Uskarphetsrelasjonen

Usikkerhet — for likt måleusikkerhet

Uskarphetsrelasjonen angir en fundamental begrensning i målinger.

Heisenbergs uskarphetsrelasjon (1927):

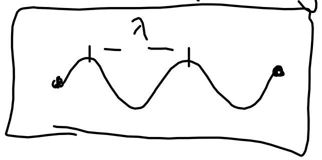
$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \left(\text{noen skriver } \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \right)$$

hvor σ_x og σ_p er standardavvik for x og p i et sett med målinger.

Merk at $\sigma = 0$ og $\sigma = \infty$ er mulig.

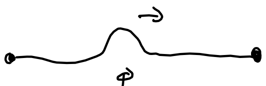
Eksempel: stående bølge med veldefinert bølgelengde

$$\psi = e^{i(kx-\omega t)} = \cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)$$



har skarp bevegelsesmengde $\lambda = \frac{h}{p}$

uskarp posisjon



her

skarp posisjon

uskarp bevegelsesmengde fordi λ ikke er (så) veldefinert.

Den generelle uskarphetsrelasjonen

La A og B være to observable med hermitiske operatorer $\hat{A}$ og $\hat{B}$ og la $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ (kommutator). Da er

$$\boxed{\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2} \qquad \left(\langle \hat{C} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{C} \psi \, dx \right)$$

Heisenberg er et spesialtilfelle. Vi må regne ut $[\hat{x}, \hat{p}]$.

$$[\hat{x}, \hat{p}] f(x) = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) f(x) = \left[x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) x \right] f(x)$$

$$= -i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(x f(x)) = \cancel{-i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x}} + i\hbar \left(f(x) + \cancel{x \frac{\partial f}{\partial x}} \right) = i\hbar f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar}$$

Innsatt i den generelle uskarphetsrelasjonen får vi

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2i} \langle i\hbar \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2\cancel{i}} \cancel{i}\hbar \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \Rightarrow \underline{\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Observable til operatorer som ikke kommuterer kalles for <u>inkompatible</u> dvs. at de samtidig ikke kan måles til vilkårlig presisjon.

Bevis usikkerhetsrelasjonen

Griffiths 3.5.1

Kompakt notasjon: $\langle \psi | \psi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi' dx$ braket-notasjon

bra ket

P.A.M. Dirac

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, dx = \langle \psi | Q \psi \rangle$$

Hermitisk operator $\langle \psi | Q \psi \rangle = \langle Q \psi | \psi \rangle$

Normering $\langle \psi | \psi \rangle = 1$