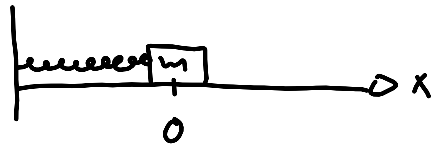
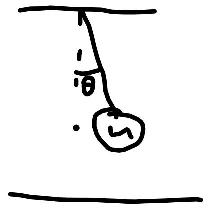
Harmonisk oscillator (HO) potensialet

Typisk eksempel:





$F = -kx$

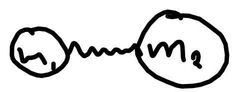
fjærkonstant

Løsning $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ hvor $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ er vinkelfrekvens

Kan skrive $F = -m\omega^2 x$ uten referanse til fjær.

Potensiell energi $F = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \underline{V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \text{ HO potensialet}}$

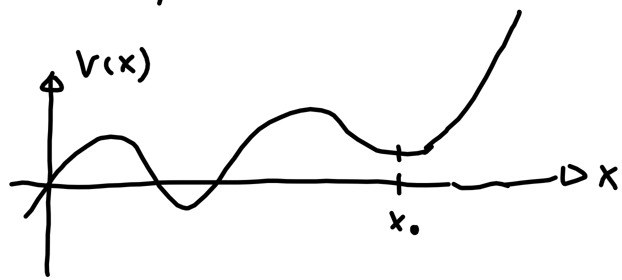
Hva beskriver HO? F.eks. HCl molekyl



Her er $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ k er kraftkonst til binding

μ redusert masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

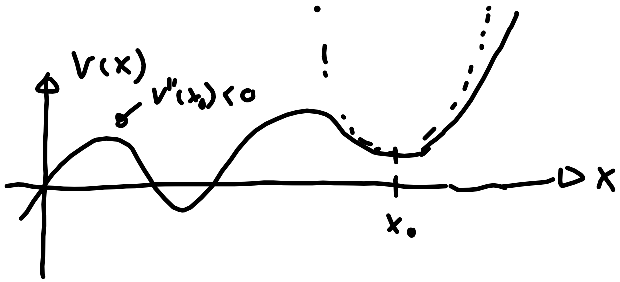
"Alt" annet



Taylor serie om x_0

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}\left((x-x_0)^3\right)$$

"Alt" annet



Taylor serie om x_0

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}((x-x_0)^3)$$

Vi vet at $V'(x_0) = 0$ og vi vet at en konstant $V_0 = V(x_0)$ i potensialet ikke endrer noe på fysikken. Det vil si: at

$$\underline{V(x) \simeq \frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2} \quad \text{når vi er nær } x_0$$

Dette er et HO potensiale, dersom $V''(x_0) > 0 \Rightarrow m\omega^2 = V''(x_0)$

TUSL med HO potensialet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi$$

To løsningsmetoder:
* algebraisk (Diracs triks)
* analytisk (et lite helvete)

Stigeoperatorer

$$\hat{a}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p}+m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p}+m\omega\hat{x})$$

Hva skal vi med $\hat{a}_\pm$?

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[(+i\hat{p}+m\omega\hat{x})(-i\hat{p}+m\omega\hat{x})\right] = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[\hat{p}^2 + im\omega\hat{p}\hat{x} - im\omega\hat{x}\hat{p} + m^2\omega^2\hat{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 - im\omega\,(\underline{\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}})\right] \qquad \left([\hat{x},\hat{p}] = \hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x} = i\hbar\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hbar m\omega\right] = \frac{1}{2\hbar m\omega}\left[\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2\right] + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \Rightarrow \underline{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)}$$

På samme måte kan vi vise at $\underline{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)}$

Underlige sammenhenger:

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

TUSL:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Gitt at ψ er en løsning av TUSL, så er også $\hat{a}_+\psi$ og $\hat{a}_-\psi$ løsninger.

Bevis: (for $\hat{a}_+$) Anta $\boxed{\hat{H}\psi = E\psi}$

$\hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_- = 1$

$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \hat{a}_+\hat{a}_- + 1$

$$\underline{\hat{H}(\hat{a}_+\psi)} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \tfrac{1}{2}\right)(\hat{a}_+\psi) = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_-\hat{a}_+ + \tfrac{1}{2}\hat{a}_+\right)\psi$$

$$= \hat{a}_+\hbar\omega\left(\underline{\hat{a}_-\hat{a}_+} + \tfrac{1}{2}\right)\psi = \hat{a}_+\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + 1 + \tfrac{1}{2}\right)\psi$$

$$= \hat{a}_+\left(\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega\right)\psi$$

$$= \hat{a}_+\left(\hat{H} + \hbar\omega\right)\psi = \hat{a}_+(E + \hbar\omega)\psi = \underline{(E+\hbar\omega)\hat{a}_+\psi}$$

$\hat{a}_+\psi$ er altså en løsning av TUSL med energi $E + \hbar\omega$

På samme måte er $\hat{a}_-\psi$ en løsning med energi $E - \hbar\omega$

P.g.a. av dette kalles $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ <u>stigoperatorer</u>.

<u>Grunntilstand</u>

Vi trenger en tilstand for å begynne.

Har at $E > V_{min}$ = minimum til potensialet (Oppgave 2.2 i Griffiths)

For HO er $V_{min} = 0$ $(x=0)$ slik at $E > 0$.

Da må det finnes en ψ_0 som er løsning av TUSL slik at $\hat{a}_-\psi_0 = 0$.

Dette gir $\hat{a}_-\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})\psi_0 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_0 = 0}$

Vi løser diff.ligning for ψ_0:

$$\cancel{\hbar}\frac{d\psi_0}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0 = 0$$

$$\int\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x\,dx$$

$$\ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + A'$$

$$\psi_0 = A\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{grunntilstand til HO}$$

Normering gir A: $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0|^2dx = 1 \Rightarrow A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

$$\boxed{\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}$$

Energi i grunntilstand:

$E = \frac{1}{2}\hbar\omega$

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \tfrac{1}{2}\right)\psi_0 = \cancel{\hbar\omega\hat{a}_+}\underbrace{\hat{a}_-\psi_0}_{0} + \underline{\tfrac{1}{2}\hbar\omega}\psi_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega\psi_0$$

Alle andre tilstander: $\psi_n = A_n \hat{a}_+^n \psi_0$ med energi: $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, $n=0,1,2,\ldots$

normeringskonstant

Hva er grensebetingelsene?

$\psi_n(x) \to 0$ når $|x| \to \infty$ for $V(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} \infty$

Hva er A_n? Introduserer $\hat{N} = \hat{a}_+\hat{a}_-$. Kan også skrives $\hat{N} = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}$

Og $\hat{N} = \hat{a}_-\hat{a}_+ - 1$.

$$\hat{N}\psi_n = \left(\frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}\right)\psi_n = \frac{1}{\hbar\omega}E_n\psi_n - \frac{1}{2}\psi_n = \frac{1}{\cancel{\hbar\omega}}\cancel{\hbar\omega}(n+\cancel{\tfrac{1}{2}})\psi_n - \cancel{\tfrac{1}{2}\psi_n} = n\psi_n$$

$\hat{N}$ kalles for antallsoperatoren.