Noen løsninger

$$a_{j+2} = \frac{2j - 2n}{(j+2)(j+1)} a_j$$ må terminere for $n = j$

Løsninger for $n=0$: $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

1) Velger $a_1 = 0$ og $a_0 \neq 0$

Da er $a_2 = \frac{2\cdot 0 - 2\cdot 0}{(0+2)(0+1)} a_0 = 0$

$h(\xi) = a_0 \Rightarrow \psi(\xi) = h(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = a_0 e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$

2) Velger $a_1 \neq 0$ og $a_0 = 0$

Vil ikke terminere, gir ikke gyldige løsninger. $a_3 = \frac{2\cdot 1 - 2\cdot 0}{(1+2)(1+1)} a_1 = \frac{1}{3} a_1$

Løsning for $n=1$: $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

1) Velger $a_1 = 0$ og $a_0 \neq 0$

Terminerer ikke, ingen gyldig løsning.

2) Velger $a_1 \neq 0$ og $a_0 = 0$

$a_3 = 0 \cdot a_1 = 0$

$h(\xi) = a_1 \xi \Rightarrow \psi(\xi) = a_1 \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$

Løsning for $n=2$: $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$

1) Velger $a_1 = 0$ og $a_0 \neq 0$

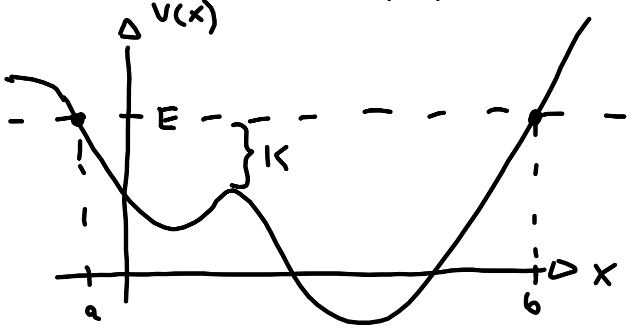
$$a_2 = -2a_0 \,, \quad a_4 = 0 \cdot a_2 = 0$$

$$\underline{h(\xi)} = a_0 - 2a_0\xi^2 \Rightarrow \underline{\psi(\xi) = \underline{a_0(1-2\xi^2)}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}$$

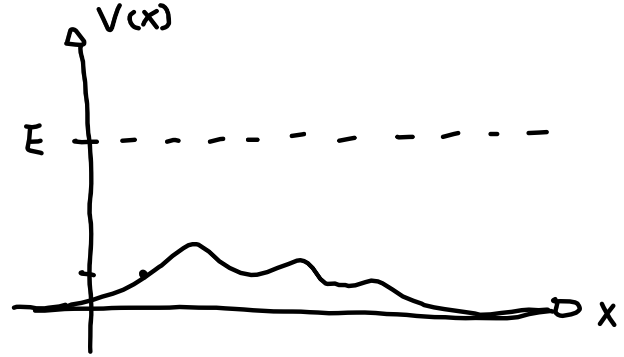
Hermite polynom

Tilstander

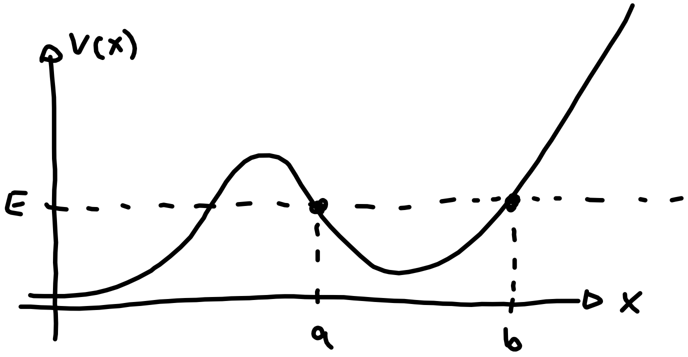
$E = K + V$



bunden tilstand ($E < V_{maks}$)



spredningstilstand ($E > V_{maks}$)



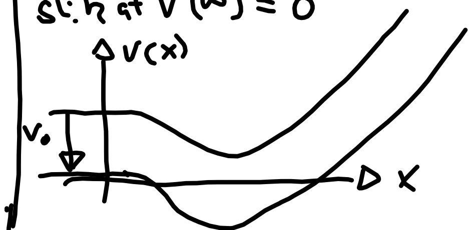
klassisk en bunden tilstand, kvantemekanisk en spredningstilstand (tunnelering)

Alt som betyr noe er $V(\infty)$ og $V(-\infty)$

1) Bunden tilstand $E < V(\infty)$ og $E < V(-\infty)$

2) Spredningstilstand har $E > V(\infty)$ eller $E > V(-\infty)$.

I praksis kan vi reskalere $V(\infty) < \infty$ slik at $V(\infty) = 0$



Da er $E < 0$ bundne og $E > 0$ spredningstilstand

Spredningstilstander får ikke kvantisert energi.

Stasjonære spredningstilstander (Løsninger av TUSL) har kontinuerlig energifordeling (kontinuerlig fordeling av bølgetall).

$$\underline{\psi(x) = e^{i(kx-\omega t)}} \quad \left(= \underbrace{e^{ikx}}_{\psi_k} e^{-i\omega t} = e^{ikx} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \qquad E = \hbar\omega \right)$$

For bundne tilstander var løsningene av TASL

$$\boxed{\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}}$$

Hva med spredningstilstander? Vi tar kontinuumsgrensen:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \text{vi tar } E_n \to E(k) \text{ og } c_n \to c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{\text{Yoda}}{\phi(k)}\, dk$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) \psi_k(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E(k)t}\, dk} \quad \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E(k)t} = e^{-i\omega(k)t} \right)$$

Hvordan finne $\phi(k)$? Fourier transformasjon

$$\underset{\text{Yoda}}{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \Psi(x,0)\, dx \qquad \left(c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \Psi(x,0)\, dx \right)$$

Fri partikkel (gjensyn)

TUSL: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Har planbølgeløsning $\underline{\psi_k(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}}$ $\underline{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$

Griffiths: kan ikke normeres $\int_{-\infty}^{\infty} |Ae^{ikx}|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$

$\Rightarrow$ en fri partikkel kan ikke finnes i en stasjonær tilstand

<u>eller</u> en fri partikkel kan ikke ha skarp energi

Annet syn: fri partikkel eksisterer ikke $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

Matematisk sort magi: ta en verden som er en sirkel med <u>S^1</u> omkrets L. Da har fri partikkel $(V(x)=0)$ løsningene

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x} \quad \text{med} \quad k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(Oblig 7)}$$

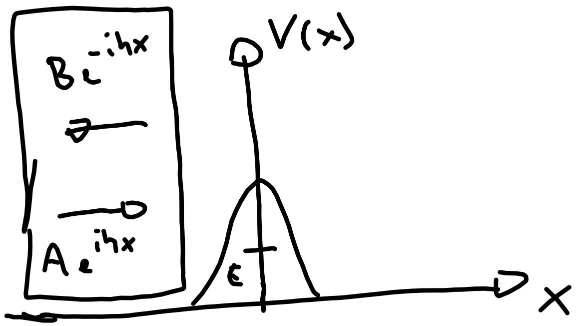
fra $\psi(0) = \psi(L)$ (grensebetingelse)

$L \to \infty$ så får vi et kontinuum energi og bølgelengde

$|\psi_n(x)|^2 \to 0$ (ikke normerbar) men veldefinert.

Fri partikkel planbølger

$$\psi_k(x)\, e^{-i\omega t} = A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)}$$



$$\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)$$

$$\cos\left[k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right] + i\sin\left[k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right]$$

$$\cos[\underbrace{k(x-v_f t)}_{\text{forovergående bølge } x-v_f t}] + i\sin[k(x-v_f t)]$$

$$\cos(kx+\omega t) - i\sin(kx+\omega t)$$

$$\cos[\underbrace{k(x+v_f t)}_{\text{bakovergående } x+v_f t}] - i\sin[k(x+v_f t)]$$

Altså e^{ikx} går til høyre og e^{-ikx} går til venstre