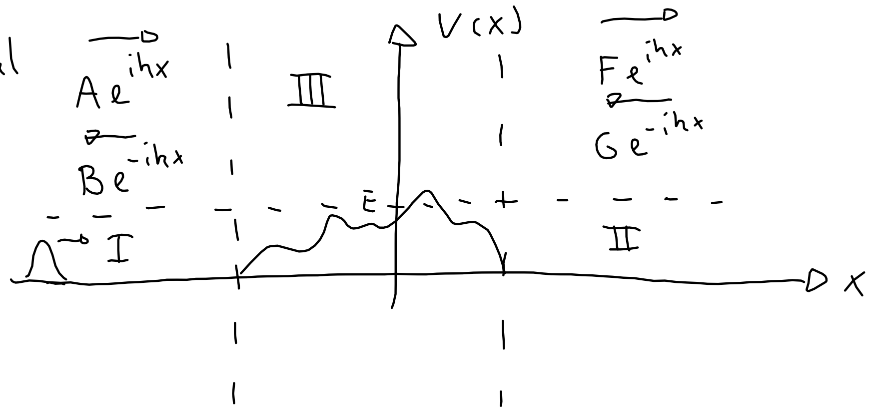
Refleksjon & transmisjon

En partikkel
energi E



Hva skjer med en partikkel som møter dette potensialet?
Transmisjon eller refleksjon.

A er innkommende amplitude,
B er reflektert —||—,
F er transmittert —||—.

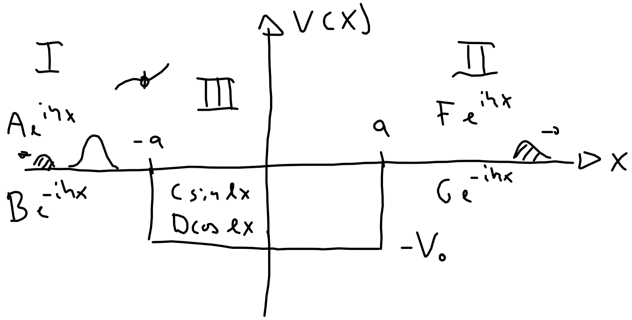
Refleksjonskoeffisient $R \equiv \frac{|B|^2}{|A|^2}$ sannsynlighet (andel) for refleksjon

Transmisjonskoeffisient $T \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2}$ sannsynlighet (andel) for transmisjon

Dersom $T > 0$ for $E < V_{maks}$ har vi tunnelering.

Vi vil se at $T + R = 1$. Merk at R og T er energiavhengig.

Endelig brønn



$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{for } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \qquad V_0 > 0$$

Ser på partikkel inn fra venstre og $E > 0$ (spredningstilstand)

Løser SL i de tre områdene:

I) TUSL $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$ hvor $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Har løsning $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

II) TUSL $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$

Har løsning $\psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$

III) TUSL $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = E\psi$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}\psi = -l^2\psi \quad \text{hvor} \quad l = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

Har løsning $\psi(x) = C\sin(lx) + D\cos(lx)$

Grensebetingelser:

ψ kontinuerlig $\Rightarrow$ $\underbrace{A e^{ika} + B e^{ika}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{-C\sin la + D\cos la}_{\mathrm{III}}$ for $x=-a$

$\underbrace{C\sin la + D\cos la}_{\mathrm{III}} = \underbrace{F e^{ika}}_{\mathrm{II}}$ for $x=a$ $(G=0)$

ψ' kontinuerlig $\Rightarrow$ $\underbrace{ikAe^{-ika} - ikBe^{ika}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{lC\cos la + lD\sin la}_{\mathrm{III}}$ for $x=-a$

$\underbrace{lC\cos la - lD\sin la}_{\mathrm{III}} = \underbrace{ikFe^{ika}}_{\mathrm{II}}$ for $x=a$

Fire ligninger, fem ukjente. Kan finne forholdet mellom A, B og F.

Oppgave 2.32 i Griffiths: $B = i\dfrac{\sin(2la)}{2kl}(l^2-k^2)F$

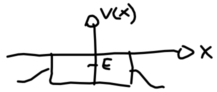
$$F = \frac{e^{-2ika}}{\cos(2la) - i\frac{(k^2+l^2)}{2kl}\sin(2la)}A$$

Transmisjonssannsynlighet

$$T \equiv \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\left|\cos(2la) - i\frac{(k^2+l^2)}{2kl}\sin(2la)\right|^2} = \frac{1}{\cos^2(2la) + \frac{(k^2+l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(2la)}$$

$$= \frac{1}{1-\sin^2(2la) + \frac{(k^2+l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(2la)} = \frac{1}{1 + \frac{(k^2-l^2)^2}{4k^2l^2}\sin^2(2la)} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\right)}$$

Bundne tilstander $(E < 0)$



Løser TUSL i de tre områdene

I $\quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = \kappa^2\psi$, hvor $\kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ $\quad \left(k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$

Har løsning $\psi(x) = Ae^{-\kappa x} + \underline{Be^{\kappa x}}$ $\quad (x < -a)$

Må ha $A = 0$, hvis ikke går vi $\psi \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

II $\quad \frac{d^2\psi}{dx} = \kappa^2\psi$

Har løsning $\psi(x) = \underline{Fe^{-\kappa x}} + Ge^{\kappa x}$

Må ha $G = 0$, hvis ikke går vi $\psi \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

III $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -l^2\psi$ hvor $l = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$

Har løsning $\psi(x) = C\sin lx + D\cos lx$

Vi benytter at et symmetrisk potensial $V(-x) = V(x)$ har enten symmetrisk eller anti-symmetriske løsninger. Oppgave 2.1 c) i Griffiths. Vi ser på de symmetriske løsningene. Anti-symmetriske: Oppgave 2.29 i Griffiths og Oblig 8. Har da løsning

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{\kappa x} & x < -a \\ D\cos lx & -a \le x \le a \\ Fe^{-\kappa x} & x > a \end{cases}$$