Sort-legeme stråling

Sort-legeme absorberer all stråling.

Alle legemer sender ut termisk stråling.

Problemet i klassisk fysikk er at vi får uendelig mye energi.

Eksperiment: Radians (energi per tidsenhet per areal)

$$M(T) = \sigma T^4 \quad \text{(Stefan-Boltzmanns lov)}$$

$$\sigma = 5{,}676 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W m^{-2} K^{-4}}$$

Lyspære $T = 2000\ K$

$$M(2000) \simeq 40 \cdot 10^4\ W m^{-2}$$
$$= 40\ W$$

Meg selv $T = 310\ K$

$$M(310) = 500\ W m^{-2}$$

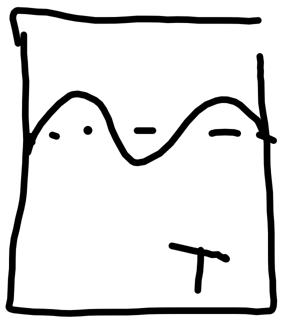
$2 m^2$ overflate $\Rightarrow$ $1000\ W$

Wiens forskyvningslov:

Maksimum av stråling er ved λ_{maks} gitt ved

$$\lambda_{maks} \cdot T = 2{,}897 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mK}$$

Sort-legeme: Ovn



liten åpning

stående em-bølger

Klassisk fysikk:

Rayleigh-Jeans lov (ν [ny] frekvens)

$$M_\nu(T) \equiv \frac{dM}{d\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\langle E\rangle$$

antall svingemoder

gjennomsnittlig energi per svingemode

Ekvipartisjonsprinsippet gir $\langle E\rangle$ uavhengig av frekvens. $\langle E\rangle = k_B T$

$k_B = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant

$$\Rightarrow M(T) = \int M_\nu(T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi k_B T}{c^2}\nu^2 d\nu = \infty$$

Plancks kvantiseringshypotese

Oktober 1900: strålingen kan bare komme i bestemte pakker (kvanter) med energi

$$E_n = nh\nu, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Energi per svingemode blir

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$$

og dermed

$$M_\nu(T) = \frac{2\pi}{(hc)^2} \frac{(h\nu)^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1} .$$

Den totale radiansen blir

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi}{(hc)^2} \frac{(h\nu)^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu = \frac{2\pi k_B^4}{(hc)^2 h} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

ved variabelbytte $x = \frac{h\nu}{k_B T}$

Rottmann: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$

$$M(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15\, h\, (hc)^2} T^4$$

$hc = 1240$ eV nm (MeV fm)

$\hbar c = 197{,}3$ eV nm (MeV fm)

stemmer med eksperiment dersom

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} = 4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs}$$

<u>Plancks konstant</u> Bruker også $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Resultatet har rimelige grenser

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^2 + \ldots \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$$

h eller ν er liten
eller T er stor slik at

$$\frac{h\nu}{k_B T} << 1$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \simeq \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = k_B T$$

$h \to 0$ gir tilbake klassisk fysikk som det burde.

Bytte av variable fra frekvens til bølgelengde

$$M_\lambda(T) \equiv \frac{dM}{d\lambda}$$

Vil finne M_λ ved hjelp av M_ν. (en stråling $\lambda\nu = c$)

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$M_\lambda \Delta\lambda = M_\nu \Delta\nu$$

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

$$M_\lambda = M_\nu \frac{\Delta\nu}{\Delta\lambda} = M_\nu \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|$$

Jacobideterminant

$$M_\lambda = M_{\nu=\frac{c}{\lambda}} \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{2\pi}{(hc)^2} \frac{(hc)^3}{\lambda^3 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \frac{c}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{2\pi (k_B T)^5}{h^4 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}, \quad x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

M_λ har samme maksimum som $g(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{x^4}{e^x-1}\left(5 - \frac{x}{1-e^{-x}}\right) = 0$$

Har numerisk løsning $x_{maks} = 4,965$

$$\lambda = \frac{hc}{x k_B T} \Rightarrow \lambda_{maks} T = \frac{hc}{x_{maks} k_B} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{4,965 \cdot 8,614 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}}$$

$$= 2,899 \cdot 10^{6} \text{ nm K}$$