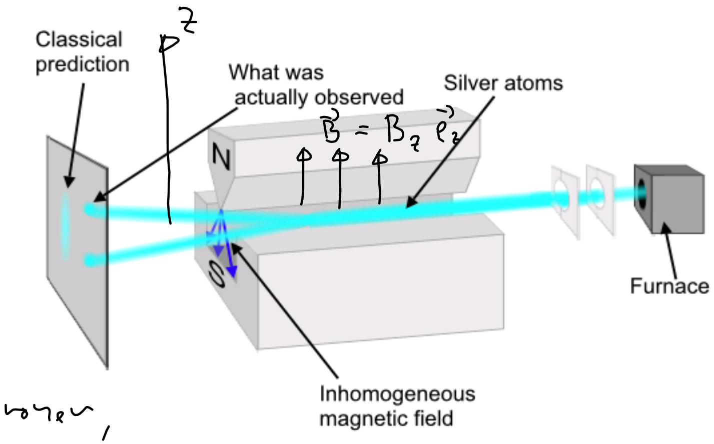
Kan måle $\underline{\hbar^2 l(l+1)}$ for L^2 og $\underline{\hbar m}$ for L_z.

$L^2 \geq L_z^2$? $\hbar^2 l(l+1) \geq \hbar^2 m^2$? $\underline{\text{Ja!}}$ Fordi: $|m| \leq l$

I klassisk fysikk er $L^2 = L_z^2$ når $\vec{L}$ ligger langs z-aksen.

I kvantemekanikk er $\hbar^2 l(l+1) = \hbar^2 m^2$ bare når $l=0$ og $m=0$.

Spinn



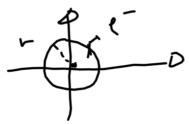
Stern-Gerlach eksperimentet (1922)

Sender sølvatomer gjennom et inhomogent magnetfelt. Eksperimentet ble gjort for å undersøke Bohrs kvantisering av angulærmoment. Sølvatomet har 46+1 elektroner, altså et slags „hydrogenatom" (gjort med hydrogen i 1927).

Klassisk fysikk: En strøm med dipolmoment $\vec{\mu}$ får en potensiell energi V i et magnetfelt $\vec{B}$ gitt ved

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

En ladning i sirkelbevegelse har et magnetisk dipolmoment μ som er $\mu = I \cdot A$ og som peker etter høyrehåndsregelen.



En enkeltpartikkel har

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v} = \frac{qv}{2\pi r}$$

Dette gir $\mu = \frac{qv}{2\pi \cancel{r}} \cdot \pi r^{\cancel{2}} = \frac{qvr}{2} = \frac{q\, mvr}{2m} = \frac{q}{2m} L$

For et elektron er $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$

Har at $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ (i en dimensjon $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$)

Dersom $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ da er ($B_z(z)$)

$$V = -\mu_z B_z = \frac{e}{2m_e} L_z B_z$$

og kraften som virker er

$$\vec{F} = -\frac{e}{2m_e} L_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

I klassisk fysikk vil det være et kontinuerlig „mønster" i detektoren.

I Bohr sin modell er $L_z = \hbar m$ hvor m er et heltall.

Eksperimentet forventet $m = 0$ ($l=0$) og kun en stripe. ($l = 1$ gir $m = 0, \pm 1$)

Så to striper ☹.

Konklusjon: Vi må postulere et ekstra dipolmoment forårsaket av (egen) spinn. $\vec{S}$

Kan ikke utlede eksistensen av spinn i ikke-relativistisk kvantemekanikk.

Dukker naturlig opp i relativistisk kvantemekanikk (Dirac-ligningen)

I analogi med $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ har vi operatorene $\hat{S}^2$ og $\hat{S}_z$ med egenverdiligningen

$$\hat{S}^2 \chi = \underbrace{\hbar^2 s(s+1)}_{\text{egenverdi}} \chi \quad \text{og} \quad \hat{S}_z \chi = \hbar m_s \chi$$

egenfunksjon / egentilstand

s kalles litt upresist for spinnet til en partikkel

hvor $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ og $m_s = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$.

Partikkel	spinn s
higgsbosonet	0
Leptoner (e, μ, τ) kvarker ($u, d, \ldots$)	$\frac{1}{2}$
Foton γ, W, Z, gluon g	1
	~~
graviton	2

Heltallige spinn kalles <u>bosoner</u>,
halvtallige spinn kalles <u>fermioner</u>.

For $s = \frac{1}{2}$ så er $m_s = \pm\frac{1}{2}$,
$m_s = \pm\frac{1}{2}$ kalles ofte for „opp" og „ned".
Tilstandene skrives ofte som
$\chi_\uparrow$ og $\chi_\downarrow$ eller $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$

Elektronets „innebygde" magnetisk dipolmoment er

$$\vec{\mu}_s = -g_e \frac{e}{2m_e}\vec{S}$$

(g_e kalles den anomale faktoren for $\vec{\mu}_s$. I relativistisk kvantemekanikk så kan man bevise at $g_e = 2$. I kvantefeltteori er $g_e = 2.00231930436222$)

Dette gir et totalt magnetisk dipolmoment

$$\vec{\mu}_{tot} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e}\left(\vec{L} + g_e\vec{S}\right)$$

og en kraft i GS-eksperimentet $F_z = -\frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\partial B_z}{\partial z}\left(m_l + g_e m_s\right)$

Med $l=0$ og $m_l=0$, og $s=\frac{1}{2}$, har vi $m_s=\pm\frac{1}{2}$ og vi får to linjer.

Vi har fått et nytt kvantetall i hydrogenatomet og bølgefunksjonen må spesifiseres som
$$\psi_{nlm_lm_s}(r,\theta,\varphi) = \underbrace{\psi_{nlm_l}(r,\theta,\varphi)}_{\text{romdel}}\ \underbrace{\chi_{m_s}}_{\text{spinndel}} \qquad \Big(|\psi,\chi\rangle = |\psi\rangle|\chi\rangle\Big)$$

Uten spinn hadde vi en degenerasjon for H-atomet på $d(n)=n^2$, med spinn er $d(n)=2n^2$.

Vi ser bort fra spinn (en stund) og sette H-atomet i et magnetfelt $\vec{B}=B_z\vec{e}_z$.
Da oppstår noe som kalles Zeemaneffekten, hvor noe av degenerasjonen forsvinner.
Minner om $V=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Da er Hamiltonoperatoren
$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \vec{\mu}\cdot\vec{B} \quad \text{hvor} \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\vec{\nabla}^2 - \frac{ke^2}{r}$$
Vi får
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2m_e}\hat{\vec{L}}\cdot\vec{B} = \hat{H}_0 + \frac{eB_z}{2m_e}\hat{L}_z$$
Vil finne egenfunksjonene til $\hat{H}$. De er de samme som for $\hat{H}_0$!
Hvorfor? De løsningene vi hadde var samtidige egenfunksjoner til $\hat{H}_0$, $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$.
Nå kommuterer $\hat{H}$ med $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$.

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = [\hat{H}_0 + \frac{eB_z}{2m_e}\hat{L}_z, \hat{L}_z] = [\hat{H}_0, \hat{L}_z] + \frac{eB_z}{2m_e}[\hat{L}_z, \hat{L}_z] = 0$$

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}_0 + \frac{eB_z}{2m_e}\hat{L}_z, \hat{L}^2] = [\hat{H}_0, \hat{L}^2] + \frac{eB_z}{2m_e}[\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$$

Alt som er en egenfunksjon ψ_{nlm} til $\hat{H}_0$ er det til $\hat{H}$:

$$\hat{H}\psi_{nlm} = (\hat{H}_0 + \frac{eB_z}{2m_e}\hat{L}_z)\psi_{nlm} = \hat{H}_0\psi_{nlm} + \frac{eB_z}{2m_e}\hat{L}_z\psi_{nlm} = E_n\psi_{nlm} + \frac{eB_z}{2m_e}\hbar m\psi_{nlm}$$

$$= (E_n + \frac{eB_z}{2m_e}\hbar m)\psi_{nlm}$$

men egenverdiene er forskjellig $E_{nm} = E_n + \frac{eB_z}{2m_e} m\hbar$

For en gitt l så vil energiene splittes opp i $2l+1$ nivåer avhengig av m, f.eks. $l=1$ gir $m = 0, \pm 1$.