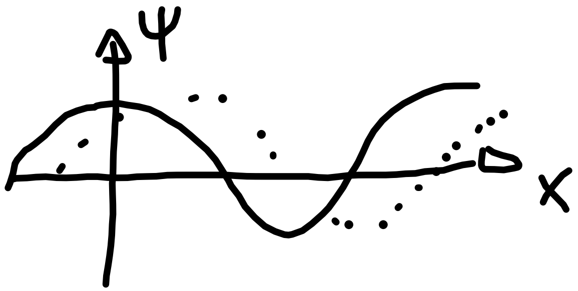
Bølgeligninger

Bølgeligningen

$$\boxed{v_f^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}}$$

hastighet



Generell løsning: $\psi(x,t) = \overbrace{A f(x - v_f t)}^{\text{fremadgående}} + \overbrace{B g(x + v_f t)}^{\text{bakovergående}}$

Sjekk:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v_f f'(x - v_f t)\right) = (-v_f)^2 f''(x - v_f t)$$

$$= v_f^2 f''(x - v_f t)$$

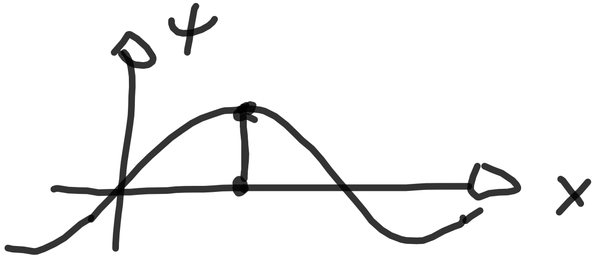
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(x - v_f t)\right) = f''(x - v_f t)$$

$$\Rightarrow \overset{\text{V.S.}}{v_f^2 f''(x - v_f t)} = \overset{\text{H.S.}}{v_f^2 f''(x - v_f t)}$$

Planbølgeløsningen

$$\psi(x,t) = A\sin[k(x - v_i t)]$$

$$\psi(x,t) = B\cos[k(x - v_i t)]$$



Den riktige ligningen er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

potensial

<u>Schrödingerligningen</u> (SL)

SL med $V(x) = 0$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}}$$

Planbølgeløsningene vi hadde tidligere fungerer ikke. Vi må bruke

$$\underline{\psi(x,t) = A e^{ik(x - v_f t)}} \quad \left(= A\cos(k(x-v_f t)) + A i \sin(k(x-v_f t))\right)$$

Sjekk: V.S. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ikA e^{ik(x-v_f t)}\right) = -k^2 A e^{ik(x-v_f t)} = -k^2 \psi$

H.S. $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -ikv_f A e^{ik(x-v_f t)} = -ikv_f \psi$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2) = i\hbar(-ikv_f) \Rightarrow \underline{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar k v_f}$$

Fasehastighet

Hastigheten til en enkeltbølge kalles for fasehastigheten v_f.

Siden frekvens er antall bølgetoppen i et tidsintervall, så er $\nu \equiv \frac{v_f}{\lambda}$ $\left(\underline{\nu\lambda = v_f}\right)$

Dette gir $\hbar k v_f = \hbar \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} \nu \cancel{\lambda} = \hbar\omega$

For at $\psi(x,t) = Ae^{ik(x - v_f t)}$ skal være løsning av SL

så må

$$\boxed{\underset{\substack{\parallel \\ \frac{p^2}{2m}}}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = \hbar k v_f = \hbar\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m} = E \Rightarrow E = K \quad (\text{vi satte } V = 0)$$

Schrödingerligningen kan brukes til å beskrive en ikke-relativistisk partikkel.

Merk at vi kan vi skrive løsningen som

$$\psi(x,t) = A e^{ik(x-v_f t)} = A e^{i(kx-\omega t)}$$

enklere å regne med

Fasehastigheten kan finnes fra

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Bølgepakken

Vi må addere (uendelig) mange planbølger i det som kalles en bølgepakke. [superponering]

Disse har forskjellig k og $\omega(k)$.

Eksempel: $\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$

hvor $k = k_0 \pm \frac{1}{2}\Delta k$, $\omega = \omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega$

og ψ_1 og ψ_2 har samme amplitude A.

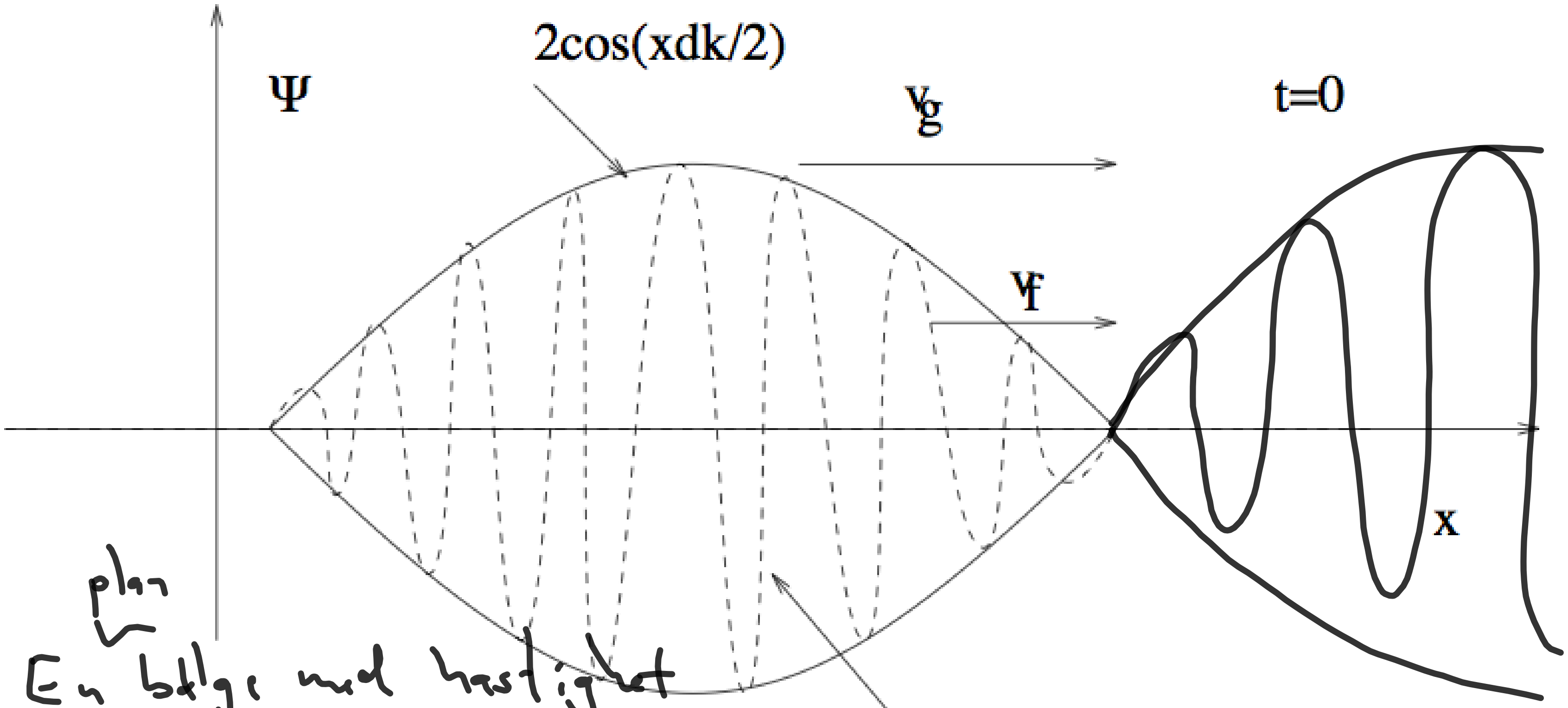
Dette gir
$$\psi(x,t) = \underbrace{A}_{\psi_1}\exp\left[i\left(\left(k_0+\tfrac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0+\tfrac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right)\right] + \underbrace{A}_{\psi_2}\exp\left[i\left(\left(k_0-\tfrac{1}{2}\Delta k\right)x - \left(\omega_0-\tfrac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right)\right]$$

$$= A \exp[i(k_0 x - \omega t)] \Big[\exp[i(\tfrac{1}{2}\Delta k x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t)] + \exp[-i(\tfrac{1}{2}\Delta k x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t)] \Big]$$

Fra Rottmann $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \underbrace{A \exp[i(k_0 x - \omega t)]}_{\text{planbølge}} \cdot \underbrace{2\cos(\tfrac{1}{2}\Delta k x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t)}_{\substack{\text{modulerende bølge} \\ \text{omhyllningskurve}}}$$

omhyllningskurve



sin(kx)

plan

En bølge med hastighet

$v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$

planbølge k_0 ω_0

Omhyllningskurve har hastighet

$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ <u>gruppehastighet</u>

Gruppehastighet

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$$ der k_0 er det sentrale bølgetallet

Vi hadde at planbølgene var løsning bare

desom $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega$

(fri ikke-relativistisk partikkel)

$$\Rightarrow \underline{\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}}$$ dispersjonsrelasjonen

$$\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\cancel{2}\hbar k}{\cancel{2}m} = \frac{p}{m} = \frac{\cancel{m}v}{\cancel{m}} = v$$

Bølge eller partikkel?

Eksperimentet avgjør. D er „størrelsen" på eksperimentet

$\lambda << D$ partikkel

$\lambda \gtrsim D$ bølge

Eksempel: stein med $m = 1\,kg$ og $v = 10\,m/s$

$$\lambda_{stein} = \frac{h}{p} = 6.6 \cdot 10^{-35}\,m$$