Statistikk - diskret variabler

Sannsynlighet for utfall i er P_i

Må ha at $P_i \leq 1$ for $\forall i$ og $\sum_{\text{alle } i} P_i = 1$

Estimator for P_i er

$$P_i = \frac{N_i}{N}$$ hvor N_i er antall utfall i og N er antall forsøk

Mest sannsynlig utfall er det med størst P_i

Gjennomsnittsutfall er

$$\langle i \rangle \equiv \sum_i i P_i$$

kalles ofte for forventningsverdien

Forventningsverdien har estimator

$$\langle i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i i N_i$$

Vi kan generalisere forventningsverdi til en funksjon $f(i)$ som

$$\langle f(i) \rangle \equiv \sum_i f(i) P_i$$

Et mål på spredning av utfall er <u>varians</u>

$$\boxed{\sigma^2 \equiv \langle (i - \langle i \rangle)^2 \rangle}$$

Bare σ kalles for <u>standardavvik</u>.

Triks for varians

$$\langle\langle i\rangle^2\rangle = \langle i\rangle^2$$

$$\langle\langle a\rangle\rangle = \langle a\rangle$$

$$\underline{\sigma^2} \equiv \langle (i - \langle i\rangle)^2\rangle = \langle \underline{i^2} - \underline{2i\langle i\rangle} + \underline{\langle i\rangle^2}\rangle$$

$$= \langle i^2\rangle - 2\langle i\langle i\rangle\rangle + \langle i\rangle^2$$

$$= \langle i^2\rangle - 2\langle i\rangle\langle i\rangle + \langle i\rangle^2$$

$$= \underline{\langle i^2\rangle - \langle i\rangle^2}$$

Statistikk - kontinuerlige variable

<u>Sannsynlighet</u> for et utfall i intervallet $[x, x+dx]$

er $\rho(x)\,dx$ hvor $\rho(x)$ er <u>sannsynlighetstetthet</u>.

Har at $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$

Sannsynligheten for å få et utfall i intervallet

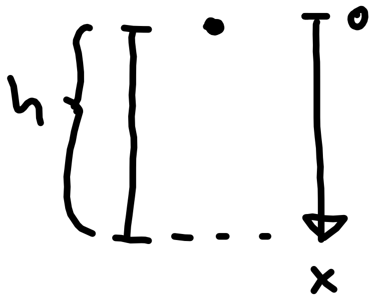
$[a, b]$ er $P_{ab} = \int_a^b \rho(x)\,dx$

<u>Forventningsverdien</u> er

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x\,\rho(x)\,dx \quad \text{og} \quad \langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\rho(x)\,dx$$

Varians av $\sigma^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Eksempel: En stein slippes fra en høyde h



$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \left(s = \frac{1}{2} a t^2\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Total tid i fall $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Tar bilde på tilfeldig tidspunkt.

Uniform sannsynlighetsfordeling

$$\rho(t)\,dt = \frac{1}{T}\,dt \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = \int_0^T \frac{1}{T}\,dt = \frac{t}{T}\Big|_0^T = 1 \right)$$

Finn gjennomsnittlig (forventningsverdi) der fallengde når bildet blir tatt.

Vi må finne $\rho(x)$ fra $\rho(t)$.

$$\rho(x)\,dx = \rho\left(t=\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)\left|\frac{dt}{dx}\right|dx$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{2x}{g}\right)^{-1/2}\cdot\frac{\cancel{2}}{g} = (2xg)^{-1/2}$$

Da blir

$$\rho(x)\,dx = \frac{1}{T}\frac{1}{\sqrt{2xg}}\,dx = \sqrt{\frac{g}{2h}}\frac{1}{\sqrt{2xg}} = \frac{1}{2\sqrt{hx}}$$

Forventningsverdi

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\rho(x)\,dx = \int_0^h x\frac{1}{2\sqrt{hx}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{h}}\int_0^h x^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{h}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^h = \frac{h}{3}$$

Sannsynlighetstolkningen

Klassisk fysikk	Kvantefysikk
$-\frac{\partial V}{\partial x} = m\frac{d^2x}{dt}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{spesifiserer fysikken} \\ \text{i problemet}}}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$
$(F = ma)$	
Gitt $x(0)$ gir dette $x(t)$	Gitt $\psi(x,0)$ gir dette $\psi(x,t)$

Hva er ψ ?

Max Born (1926) : $\int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx = \begin{cases} \text{sannsynligheten for} \\ \text{å observere partikkelen} \\ \text{mellom } a \text{ og } b \text{ ved tiden } t \end{cases}$

$|\psi(x,t)|^2$ er en sannsynlighetstetthet

"statistical interpretation" = sannsynlighetstolkning

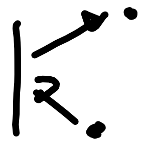
Litt filosofi

Hva betyr det å „finne" partikkelen i [a,b]

(gjøre en måling)

Mange syn:

1) Makro-mikro interaksjon (Bohr)
2) Legge igjen „spor" (Heisenberg)


p endres

3) Interaksjon av bevisst observatør (Wigner)

Fant partikkelen i [a, b]. Hvor var egentlig partikkelen før målingen?

1) I intervallet [a, b] (realisttolkning)
2) Ingensteder (ortodokse/Københavnertolkningen)
3) Nekter å svare. (agnostiker)

1) impliserer at det finnes en skjult variabel (mer informasjon)

(John) Bells teorem (1964): en skjult variabel må være ikke-lokal (kausalitet som går raskere enn lyshastigheten)