

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2140 Kvantefysikk

Dato: 16. august 2024, kl 9:00-13:00 (4 timer)

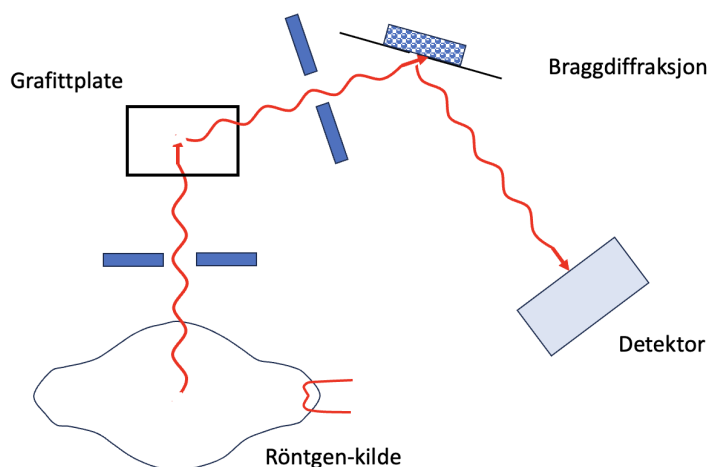
Oppgavesettet er på: 4 sider

Tillatte hjelpemidler: Rottman: 'Matematisk formelsamling', Øgrim og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter', Angell og Lian: 'Fysiske størrelser og enheter'. Godkjent kalkulator. Ett A4-ark med egne notater (begge sider av arket).

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Compton-spredning

Arthur Holly Compton mottok Nobelprisen i fysikk i 1927 for sin oppdagelse (1923) av lysets partikkelnatur. Figur 1 skisserer eksperimentoppstillingen hvor han sendte høyenergetiske röntgenstråler med energi $E_\gamma = 0.017 \text{ MeV}$ mot en grafittplate.



Figur 1: Prinsippskisse av Compton-eksperimentet.

- a) Hvilken bølgelengde λ og bevegelsesmengde p_γ hadde den innsendte röntgenstrålen? (Det kan være nyttig å bruke relasjonen $hc = 1240 \text{ eV nm}$.)

I et sitat¹ utdyper Compton sin frustrasjon over at hans eksperiment baseres både på lysets partikkelnatur og dets bølgenatur, et paradoks kjent som partikkel-bølge dualismen i kvantefysikken.

¹'The crystal spectrometer measured a wavelike phenomenon, interference. But the effect of the graphite scatterer on the value of that wavelike property could be understood only in terms of particle-like behavior'.

- b) Forklar de to viktigste stegene som röntgenstrålen gjennomgår på sin vei fra kilde til detektor i Fig. 1 og ved hvilke steder lyset oppfører seg som partikkel og som bølge.

I forbindelse med sitt eksperiment utledet Compton formelen

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta), \quad (1)$$

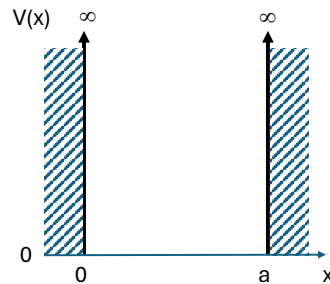
hvor $\lambda_C = h/mc$ kalles Comptonbølgelengden.

- c) Forklar symbolene i Likn. (1) og tegn bevegelsesmengde-vektorene i spredningsprosessen $\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$ med tilhørende symboler og størrelser.
- d) Skriv ned forutsetningene for Likn. (1) samt likningene for de konserveringslover som er brukt (du skal *ikke* utlede Comptonformelen).
- e) Finn Comptonbølgelengden for elektroner ($m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$) og bølgelengdeforandringen $\Delta\lambda$ for spredning i vinkelen $\theta = 60^\circ$. I Compton-eksperimentet ser man også tilfeller hvor $\Delta\lambda \approx 0$, hvorfor?

Oppgave 2 Partikkel i boks

En partikkel beveger seg i en potensialbrønn (se Fig. 2) med potensial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2)$$



Figur 2: Uendelig kassebrønnpotensial.

- a) Vis at den tidsuavhengige Schrödingerlikning (TUSL) kan skrives på formen

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x), \text{ hvor } k = \sqrt{2mE}/\hbar. \quad (3)$$

- b) Vis at $\psi(x) = A\sin(kx)$ er en løsning av Likn. (3).

- c) Finn k som funksjon av kvantetallet n (som vi betegner k_n) og energieigenverdiene E_n , hvor $n = 1, 2, 3 \dots$

Fra deloppgavene over, kjenner vi nå energieigenverdifunksjonene. I tillegg oppgir vi normeringskonstanten A slik at de ortonormerte egenfunksjonene er

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x). \quad (4)$$

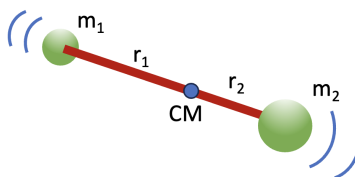
Vi skal nå studere den tidsavhengige Schrödingerlikningen (TASL) med følgende bølgefunksjonen ved tiden $t = 0$:

$$\Psi(x, t = 0) = C \sin^3\left(\frac{\pi}{a}x\right), \text{ hvor } C \text{ er normeringskonstanten.} \quad (5)$$

- d) Bruk den trigonometriske likheten $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$ til å uttrykke $\Psi(x, t = 0)$ ved hjelp av bølgefunksjoner $\psi_n(x)$, der $\psi_n(x)$ er definert i Likn. (4).
- e) Finn normeringskonstanten C .
- f) Skriv ned $\Psi(x, t)$ og vis at $\Psi(x, t)$ er en løsning av TASL.
- g) Finn forventningsverdien av energien $\langle H(t) \rangle$. Hvilke energier vil du kunne måle ved én måling og hva er sannsynligheten for å måle en gitt energi?

Oppgave 3 Diatomiske molekyler

Figur 3 illustrerer et vibrerende diatomisk molekyl med masser m_1 og m_2 der $m_2 > m_1$. Posisjonen til massesenteret (CM) er gitt ved $r_1 m_1 = r_2 m_2$. Systemet er et to-legeme problem som kan forenkles til et en-legeme problem ved å innføre redusert masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ og avstand $r = r_1 + r_2$ mellom atomene.



Figur 3: Skisse av et vibrerende diatomisk molekyl.

- a) Tegn potensialet $V(r)$ til et diatomisk molekyl hvor du merker av midlere avstand R og potesialdybden V_0 . Tegn også inn et av de enkle potensialene vi har lært om i dette kurset til å tilnærme det mer kompliserte potensialet til det diatomiske molekylet, og diskuter i hvilke grenser dette er en god tilnærming.

Videre i denne oppgaven vil vi studere det nøytrale H_2 -molekylet hvor vi setter $m_1 = m_2 = m_p$. Vi antar at H_2 -molekylet kan beskrives som en harmonisk oscillator som følger Hook's lov med fjærkonstant $k = \mu\omega^2$.

- b) Skriv ned uttrykket for molekylets vibrasjonsenergi E_{vib} som funksjon av vibrasjonskvantetallet n . Hvor stort er molekylets nullpunktsenergi og hvorfor kan ikke molekylet ha $E_{\text{vib}} = 0$?

I grunntilstanden har H_2 -molekylet bindingsenergi $E_B = 4.52$ eV og fjærkonstant $k = 573$ N/m. Protonets masse er $m_p = 938$ MeV/ c^2 .

- c) Finn vibrasjonskvantetallet n_{max} hvor vibrasjonen blir så sterk at H_2 -molekylet rives i stykker. Begrunn hvordan dette kvantetallet endrer seg hvis vi bruker en mer realistisk modell av potensialet.

Det viser seg at H_2 -molekylet er så svakt bundet at det er én og bare én elektronkonfigurasjon som kan binde molekylet sammen. I kurset har vi vist at to identiske fermioner er nærmere (fjernere fra) hverandre hvis den romlige bølgefunksjon er symmetrisk (antisymmetrisk).

- d) Hvilke symmetrier må rom-bølgefunksjonen $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ og spinn-egenfunksjonen $\chi(1, 2)$ ha for å gi sterkest binding av H_2 -molekylet? Begrunn svaret.

Det finnes fire forskjellige to-partikkel spinn-egenfunksjoner:

$$\chi(1, 2) = \chi_-(1)\chi_-(2) \quad (6)$$

$$\chi(1, 2) = \chi_+(1)\chi_+(2) \quad (7)$$

$$\chi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)] \quad (8)$$

$$\chi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_-(1)\chi_+(2)]. \quad (9)$$

- e) Skriv ned spinn-egenfunksjonen(e) som du har valgt i oppgave 3 d) og vis at symmetrien med hensyn på partikkelbytte er korrekt.