Løsning: Eksamen FYS2160 høsten 2003

Oppgave 1

a) Partisjonsfunksjonene:

$$Z_{vib} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nE}{kT}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{E}{kT}}}$$

$$Z_{\text{int}} = 1 + e^{-\frac{e}{kT}}$$

$$Z_1 = Z_{vib} \cdot Z_{\text{int}} = \frac{1+e^{-\frac{e}{kT}}}{1-e^{-\frac{E}{kT}}} \;, \qquad Z = Z_1^{\,N} \text{ (hele systemet)}$$

b) Antall atomer i tilstandene ε_1 og ε_2:

$$N_1 = NP(e_1) = \frac{N}{Z_{\text{int}}} = \frac{N}{1+e^{-\frac{e}{kT}}} \rightarrow N \quad \text{når } T \rightarrow 0$$

$$N_2 = N\frac{e^{-\frac{e}{kT}}}{1+e^{-\frac{e}{kT}}} = \frac{N}{1+e^{\frac{e}{kT}}} \rightarrow 0 \quad \text{når } T \rightarrow 0$$

c) Midlere energi pr. partikkel:

$$\bar{e} = e_1 P(e_1) + e_2\, P(e_2) = e_2\, P(e_2) = \frac{e}{1+e^{\frac{e}{kT}}}$$

Systemets indre energi:

$$U = N\bar{e} = \frac{Ne}{1+e^{\frac{e}{kT}}}$$

d) Systemets varmekapasitet C_V:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{Ne^2 k}{(kT)^2}\frac{e^{\frac{e}{kT}}}{(1+e^{\frac{e}{kT}})^2}$$

Grenseverdien for lave temperaturer($\varepsilon/kT>>1$):

$$C_V \approx Nk(\frac{e}{kT})^2 e^{-\frac{e}{kT}} \rightarrow 0 \quad \text{når } T \rightarrow 0$$

Ved T=0 er alle atomene i laveste tilstand ε_1. Ved en liten temperaturøkning tilføres det ikke nok energi til å heve atomene til et høyere nivå. Dermed kan ikke atomene øke sin indre energi, og vi får C_V=0.

e) Helmholtz fri energi for systemet er gitt ved:

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln Z_1 = -NkT \ln Z_{\text{int}}$$

Entropien bestemmes av:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = Nk \ln Z_{\text{int}} + NkT \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_{\text{int}}$$

$$= Nk\left[\ln(1+e^{-\frac{e}{kT}}) + \frac{e}{kT}\frac{1}{1+e^{\frac{e}{kT}}}\right]$$

Ser at S→0 når T→0, som stemmer med 3. hovedsetning. Videre ser vi at S→Nkln2 for T→∞. For høye temperaturer er begge nivåene ε_1 og ε_2 like sannsynlige, dvs. multiplisitet Ω=2 for hvert atom, og entropien for hele systemet blir S=Nkln2.

Oppgave 2

a) $C_P - C_V = Nk$, teori fra læreboka.

b) Reversibel prosess: dQ=TdS. Adiabat: dQ=0, som dermed gir dS=0. TdS-ligningen med dS=0 gir for ideell gass:

$$C_V \frac{dT}{T} + Nk\frac{dV}{V} = 0$$

som integrert gir

$$TV^{\frac{Nk}{C_V}} = TV^{g-1} = \text{konstant}$$

c) For Van der Waal-gass får vi

$$(\frac{\partial P}{\partial T})_V = \frac{Nk}{V-Nb}$$

og TdS-ligningen gir for dS=0:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{Nk}{C_V}\frac{dV}{V-Nb}$$

som integrert gir følgende adiabat-ligning for Van der Waal gass:

$$T(V-Nb)^{\frac{Nk}{C_V}} = \text{konstant}, \; b = 0 \text{ gir ligningen for ideell gass.}$$

d) Den indre energien for en Van der Waal gass bestemmes av den termodynamiske identiteten dU=TdS-PdV, som sammen med TdS-ligningen gir:

$$dU = C_V dT + \frac{NkT}{V - Nb} dV - PdV = C_V dT + \frac{aN^2}{V^2} dV$$

når trykket P finnes fra Van der Waal-ligningen. Når ligningen ovenfor integreres finnes:

$$U(T,V) = C_V T - \frac{aN^2}{V} + \text{konstant}$$

Det negative bidraget til energien som avhenger av a og V, skyldes tiltrekningen mellom partiklene, som er inkludert i Van der Waal-ligningen.

Ideell gass: a=0 gir U(T)=C_VT+konstant.

Oppgave 3

a) Teori fra læreboka.

b) Det kjemiske potensialet er i prinsippet bestemt av partikkeltallet i gassen:

$$N = \sum_j \frac{1}{e^{(e_j - m)/kT} - 1}$$

Hvis alle N bosonene er samlet i det laveste nivået ε_1 ved en tilstrekkelig lav temperatur må vi ha

$$e^{(e_1 - m)/kT} \approx 1, \text{ eller } e^{(e_1 - m)/kT} \approx 1 + (e_1 - m)/kT$$

Dette gir da resultatet

$$m = e_1 - \frac{kT}{N}$$

c) Betingelsen er $\frac{1}{e^{(e_1 - m)/kT_g} - 1} = \frac{2}{e^{(e_2 - m)/kT_g} - 1}$

Det kjemiske potensialet μ ved temperaturen T_g bestemmes av denne ligningen, og resultatet blir:

$$m = kT_g \ln\left[2e^{e_1/kT_g} - e^{e_2/kT_g} \right]$$

med betingelsen $2e^{e_1/kT_g} > e^{e_2/kT_g}$, eller $e_2 - e_1 < kT_g \ln 2$.