UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys2160
Eksamensdag:	Tirsdag 8. desember 2015
Tid for eksamen:	1430–1830
Oppgavesettet er på:	4 sider
Vedlegg:	ingen
Tilatte hjelpemidler	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole Rottman: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter To A4 ark med notater (arkene kan beskrives på begge sider)

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare oppgavene.

Du må i oppgavene begrunne dine svar.

Oppgave 1

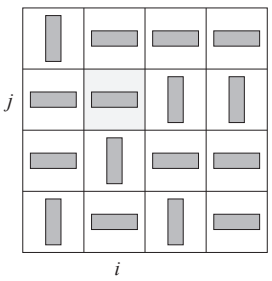
(a) Begrunn at $TdS = Q$ for en reversibel prosess.

(b) Gi et eksempel på en Maxwell-relasjon og forklar hvordan denne fremkommer.

(c) Du har oppgitt hastighetene til alle atomene fra en simulering av en gass med 1000 atomer. Hastighetene er lest inn i en 1000×3 array `vel`. For eksempel er hastigheten til atom nr 10 `vel(10,:)` i Matlab og `vel[9,:]` i Python. Skriv et kort script som finner temperaturen til gassen. Du vet at energien til gassen er $E = (3/2)NkT$, at $k = 1.38064852{\times}10^{-23}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,K^{-1}}$ og at massen til partiklene er $m = 6.63 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere oppførselen til en enkel modell for en flytende krystall i to dimensjoner ved konstant temperatur, T. Vi antar at den flytende krystallen består av N partikler. Hver partikkel kan ha to mulige orienteringer: vertikal eller horisontal. Figuren viser en illustrasjon av en slik krystall. Du kan i denne oppgaven bruke Stirlings forenklede tilnærming $\ln M! = M \ln M - M$.



Figur 1: Illustrasjon av en flytende krystall. Hver partikkel i krystallen kan ha en av to mulige orienteringer: vertikal eller horisontal. Partikkel (i, j) er illustrert. Den har horisontal orientering.

Vi skal først se på en enkelt slik partikkel. Denne partikkelen kan være i to tilstander: vertikalt eller horisontalt orientert. Energien til en enkelt partikkel er null, uavhengig av orientering.

(a) Finn partisjonsfunksjonen til dette systemet.

(b) Finn sannsynligheten for at partikkelen er vertikalt orientert.

Vi skal nå se på et system med to slike partikler. Energien for en enkelt partikkel er null uavhengig av orientering. To partikler som er inntil hverandre vil ha en energi $\epsilon > 0$ hvis en er horisontalt orientert og den andre er vertikalt orientert, og null hvis de er orientert i samme retning.

(c) Nummerer og skisser de mulige tilstandene til to-partikkel-systemet. Angi energien til hver tilstand.

(d) Vis at partisjonsfunksjonen for dette systemet er

$$Z = 2\left(1 + e^{-\epsilon/kT}\right) \ . \tag{1}$$

Sammenlikn med resultatet ovenfor og kommenter.

(e) Finn den indre energien, E, til to-partikkel systemet.

Vi skal nå lage en numerisk simulering av et to-dimensjonalt system. Anta at en tilstand til systemet kan beskrives av en matrise m. Du har fått oppgitt en funksjon `energy(m)` som returnerer energien til en tilstand beskrevet av `m`, og at du har fått oppgitt en funksjon `m = rndstate()` som returnerer en tilfeldig tilstand `m`.

(f) *(Denne oppgaven teller dobbelt)* Skisser et program som finner en tilnærmet verdi for partisjonsfunksjonen og gjennomsnittet av energien til systemet basert på 10000 tilfeldige tilstander ved en gitt temperatur T.

Vi skal nå lage en forenklet modell for dette systemet. I den forenklede modellen antar vi at energien til et system med N partikler hvorav $N_v = f\,N$ er vertikalt orientert, er

$$E = 4\,N\,\epsilon\,f\,(1-f) \ , \tag{2}$$

hvor $\epsilon > 0$ er vekselvirkningsenergien i systemet, N er antallet partikler, og $f = N_v/N$ er andelen av partiklene som er vertikalt orientert. Vi antar at det eneste bidraget til entropien til systemet kommer fra blandingsentropien for systemet.

(g) *(Denne oppgaven teller dobbelt)* Vis at entropien til systemet er tilnærmet lik

$$S = -Nk\,(f \ln f + (1-f)\ln(1-f)) \ . \tag{3}$$

(h) Finn Helmholtz frie energi og skisser Helmholtz frie energi som funksjon av f for lave T og for høye T. Forklar hvordan du kan bruke denne kurven til å finne likevektstilstanden til systemet.

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere en ideell gass inne i en liten nano-pore. For en ideell gass med N partikler ved temperaturen T i et volum V er Helmholtz frie energi

$$F(T,V,N) \simeq -NkT \ln\left(\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} V\right) + NkT\ln N - NkT\,. \qquad (4)$$

(a) Finn det kjemiske potensialet til gassen.

Når en ideell gass er inne i et lite hulrom med en overflateladning vil gassens partikler vekselvirke med overflaten. Vi antar at det gir hver enkelt partikkel i gassen en bindingsenergi ϵ. Energien ϵ kan være positiv eller negativ.

(b) Hva blir Helmholtz frie energi for gassen i hulrommet? Begrunn svaret.

(c) Vis at det kjemiske potensialet til gassen i hulrommet blir

$$\mu = kT\ln n/n_Q + \epsilon\,. \qquad (5)$$

hvor $n_Q = (2\pi mkT/h^2)^{3/2}$ og $n = N/V$.

Vi skal nå se på en ideell gass med tetthet n_0 i et stort rom *uten* overflateladning. Gassen er i termisk og diffusiv kontakt med en ideell gass av de samme partiklene som er i et lite rom *med* overflateladning.

(d) Finn et uttrykk for tettheten, n_1, til gassen inne i hulrommet uttrykt ved tettheten, n_0, til gassen utenfor hulrommet.

Oppgave 4

Vi skal i denne oppgaven studere en kvantegass i den klassiske grensen. Du kan i denne oppgaven få bruk for at integralet $\int_0^\infty e^{-u}u^{1/2}du = \sqrt{\pi}/2$ og $\int_0^\infty e^{-u}u^{3/2}du = (3/2)\sqrt{\pi}/2$.

(a) Fermi-Diracs foredelingsfunksjon for Fermioner er

$$f_{FD}(\epsilon,\mu,T) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}\,, \qquad (6)$$

Forklar symbolene (f,ϵ,μ,T) og skisser fordelingsfunksjonen for to forskjellige temperaturer, $T_2 > T_1$.

(b) Forklar hva vi mener med den klassiske grensen og vis at Fermi-Diracs fordelingsfunksjon blir $f(\epsilon,\mu,T) = e^{-(\epsilon-\mu)/kT}$ i den klassiske grensen.

For en ideell gass av Fermioner i en tre-dimensjonal boks med størrelse $V = L^3$, er de mulige energitilstandene

$$\epsilon(n_x,n_y,n_z) = an^2 = a\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\,, \qquad (7)$$

hvor $n_x, n_y, n_z = 1,2,3,\ldots$, $a = h^2/(8mL^2)$, m er massen til partiklene i gassen og $V = L^3$ er volumet til gassen.

(c) Vis at tilstandstettheten til gassen er

$$D(\epsilon) = \frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{\epsilon}{a}}\,. \tag{8}$$

(d) Vis at forventningsverdien til antallet partikler i gassen er:

$$N = e^{\mu/kT}\,\frac{\pi}{2a^{3/2}}\,(kT)^{3/2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{9}$$

(e) Finn forventningsverdien til energien, $E = E(T, V, N)$, til gassen.