

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS3110, Kvantemekanikk

Eksamensdag: 1. desember 2014

Tid for eksamen: 09:00-13:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på 3 sider.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator, D.J. Griffiths: “Introduction to Quantum Mechanics”, notatene “Time evolution of states in quantum mechanics”, “Symmetry and degeneracy” og “WKB connection formulae”, ett håndskrevet A4-ark(2 sider) med egne notater, samt K. Rottmann: “Matematisk formelsamling”.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Noen av deloppgavene har flere enn ett spørsmål.

Oppgave 1

1.1 Forklar kort hva variasjonsmetoden er.

1.2 La $\hat{O}$ være en sammensatt operator: $\hat{O} = \hat{A}\hat{B}$. Vis at $\hat{O}^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$, der $\dagger$ betyr hermitisk konjugert. Bruk dette resultatet til å vise at dersom $\hat{A}, \hat{B}$ og $\hat{O}$ alle er hermitiske operatorer, så er $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

Oppgave 2

En partikkel uten spinn med masse m og ladning $q < 0$ befinner seg i et sentralsymmetrisk potensial slik at partikkelens potensielle energi er $V(r) = V_C(r) + V_K(r)$, der $V_C(r) = -|qQ|/r$ er partikkelens potensielle energi i et Coulomb-potensial fra en ladning $Q > 0$ der vi for enkelthets skyld har satt $\epsilon_0 = 1/4\pi$, og $V_K(r) = gr^2$ er et mer generelt potensial. Konstanten $g \geq 0$ og har enheten energi per lengde kvadrat.

2.1 Skriv ned energiene og degenerasjonsgradene til de to laveste energinivåene når $g = 0$.

Anta så at g er liten slik at vi kan betrakte V_K som en perturbasjon av Coulomb-systemet som har Hamiltonoperator $H_0 + V_C$, der $H_0 = \frac{p^2}{2m}$.

2.2 Bruk perturbasjonsteori til å beregne grunntilstandsenergien korrekt til første orden i g .

2.3 Det nest laveste energinivået er degenerert for $g = 0$. Til hvor mange nye nivåer vil dette energinivået splittes når $g > 0$? Begrunn svaret ditt enten med fysiske argumenter eller med utregninger til første orden i g .

La nå g være stor slik at det er rimelig å betrakte V_C som en perturbasjon til $H_0 + V_K$.

2.4 Regn ut grunntilstandsenergien korrekt til første orden i Q for g stor.

I den siste deloppgaven er $Q = 0$. Ved tiden $t = 0$ blir systemet, som er i grunntilstanden, plutselig utsatt for et svakt elektrisk felt med amplitude E_0 og polarisasjonsretning langs z -aksen. Feltet holdes konstant en tid t_1 før det brått forsvinner igjen.

2.5 Bruk første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori til å beregne sannsynligheten for finne systemet i det første eksiterte energinivået etter at det elektriske feltet har forsvunnet.

Oppgave 3

Denne oppgaven dreier seg om effekten av spinn-bane-vekselvirkningen

$$H^{so} = \frac{b}{\hbar^2} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

på et degenerert energinivå (multipllett) i et atom med mange elektroner. Tilstandene i multiplletten har alle samme verdi for den totale banedreieimpulsen L og totalspinnet S . Vi har forenklet vekselvirkningen slik at b er en konstant med enhet energi.

3.1 Skriv ned uttrykket for energi-splittingen av multiplletten som følger av spinn-bane-vekselvirkningen. Vis også at energidifferansen mellom påfølgende energinivåer er proporsjonal med den største av de totale dreieimpulsene (J) for de to nivåene.

Spektroskopi på et ukjent atom har funnet følgende energinivåer (E_0 er det laveste energinivået): $E_0 = 0$, $E_1 = 1.70 \times 10^{-2} \text{eV}$, $E_2 = 4.08 \times 10^{-2} \text{eV}$ og $E_3 = 7.14 \times 10^{-2} \text{eV}$. Disse energinivåene er adskilt fra neste høyere energinivå med omtrent 0.3eV . Det er derfor naturlig å anta at energinivåene $E_0, \dots, E_3$ stammer fra samme multipllett der spinn-bane-vekselvirkningen er ansvarlig for oppsplittingen.

3.2 Bestem S for denne multiplletten og vis at $L > S$. Bestem også fortegnet til b , og finn verdien til L . Begrunn svarene dine.

- SLUTT -

Dette integralet kan være nyttig: $\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$