FYS 3120/4120: Klassisk mekanikk og elektromagnetisme

Midttermineksamen våren 2005
Obligatorisk sett innleveringsoppgaver

Godkjent besvarelse
er nødvendig for å kunne avlegge eksamen. Besvarelsen teller med ved fastsettelse av eksamenskarakter.

Utlevering av oppgaver
foregår fredag 1. april. Oppgavene legges ut på kursets web-side.

Frist for innlevering
er satt til fredag 8. april.

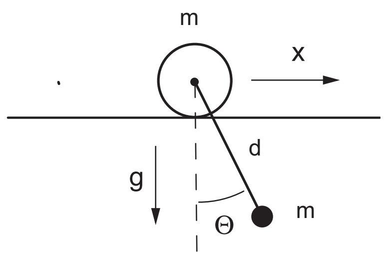
Innlevering av besvarelser
Besvarelser kan leveres enten i skriftlig form eller som vedlegg i e-post.
Skriftlig innlevering kan gjøres på ekspedisjonskontoret eller til foreleser.
Lever en ekstra kopi som retter kan beholde til vurdering ved eksamen.
Innlevering pr. e-post: Lever besvarelsen som én fil, fortrinnsvis i pdf-format. Sendes til **j.m.leinaas@fys.uio.no** med cc til **matsho@fys.uio.no**.

Spørsmål om oppgavene
kan rettes til Mats Horsdal, rom Ø466 eller Jon Magne Leinaas rom Ø471.

Husk
å skrive tilstrekkelig (men ikke unødvendig mye) med tekst til å gjøre forstått hva som foregår i besvarelsen.

Oppgavesettet
består av 3 oppgaver på de 3 neste sidene.

OPPGAVE 1
Sylinder og pendel.
Et sammensatt system er vist på figur 1. En sylinder med masse m ruller uten å gli på et horisontalt



Figur 1

bord. Til sylinderaksen er det festet en pendel som kan svinge fritt under påvirkning av tyngden. Pendelkula har samme masse m som sylinderen og lengden av pendelstanga er d. Pendelstanga regnes som masseløs. Som generaliserte koordinater velges forskyvningen x av sylinderen i horisontal retning og vinkelen θ for pendelutslaget. Sylinderen har radius R og har en homogen (konstant) massefordeling. Som initialbetingelse ved $t = 0$ setter vi $\dot{x} = 0$ og $\dot{\theta} = 0$, mens $\theta = \theta_0 \neq 0$.

a) Finn systemets Lagrangefunksjon.

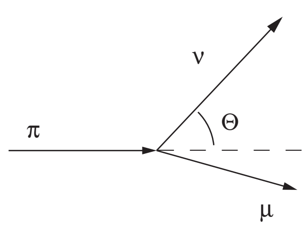
b) Sett opp Lagranges ligninger for variablene x og θ. Hvilke bevegelseskonstanter kan du identifisere?

c) Vis at ved å eliminere x får vi følgende bevegelsesligning for θ,

$$(1 - \frac{2}{5}\cos^2\theta)\ddot{\theta} + \frac{2}{5}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{g}{d}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

d) Anta små utslag om $\theta = 0$, dvs. $\theta_0 << 1$. Vis at ligningen i det tilfelle reduseres til en harmonisk oscillator-ligning og bestem svingefrekvensen.

OPPGAVE 2
Et akseleratorproblem.
Ved hjelp av en partikkelakselerator kalt en *protonsynkrotron* produseres en skarp stråle av ener-



Figur 2

girike π-mesoner. Vi regner at energien til π-mesonene er $E_\pi = 5300 MeV$, målt i laboratoriesystemet. π-mesonene er ustabile og disintegrerer i en μ-partikkel (myon) og et nøytrino (se figur 2, hvor nøytrinoet betegnes med ν). Levetiden (halveringstiden) til π-mesonene er $\tau_0 = 2.5 \cdot 10^{-8} s$, målt i partiklenes hvilesystem. Nøytrinoets hvilemasse regner vi lik 0, de andre massene er, uttrykt ved elektronmassen m_e,

$$m_\pi = 273 m_e \quad m_\mu = 207 m_e \tag{2}$$

Hvileenergien til elektronet er

$$m_e c^2 = 0.51 MeV \tag{3}$$

Energienheten MeV er relatert til SI-enheten Joule ved, $1MeV = 1.60 \cdot 10^{-13} J$.

a) Finn levetiden τ_L til π-mesonene i laboratoriesystemet. Hvor langt beveger de seg (i gjennomsnitt) før de disintegrerer.

b) Hvilken energi E_ν, målt i π-mesonets hvilesystem, har nøytrinoet som produseres ved disintegrasjonen av π-mesonet?

I det følgende betegner vi vinkelen mellom retningen til nøytrinoet og stråleretningen for π-mesonene med θ når den måles i π-mesonets hvilesystem og med θ' når den måles i laboratoriesystemet. Tilsvarende betegnelser for nøytrinoets energi er E_ν og E'_ν.

c) Anta et nøytrino sendes ut i en retning $\theta = \pi/2$, som i π-mesonets hvilesystem står vinkelrett på stråleretningen. Benytt transformasjonsformlene for impuls og energi til å finne hvilken retning θ' og hvilken energi E'_ν nøytrinoet vil ha i laboratoriesystemet? Begrunn ut fra det hvorfor halvparten av de produserte nøytrinoene vil ha energi større enn ca. $1125 MeV$ og retning innenfor en vinkel på $1.5°$ i forhold stråleretningen, begge målt i laboratoriesystemet.

d) Vis at generelt kan sammenhengen mellom θ og θ' uttrykkes ved

$$\tan\theta' = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta}{\beta + \cos\theta} \approx \frac{1}{\gamma}\tan\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

hvor $\beta = v/c$ og $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, med v som π-mesonenes hastighet målt i laboratoriesystemet.

e) Vinkelfordelingen til nøytrinoene i hvilesystemet til π-mesonene kan uttrykkes ved funksjonen $n_0(\theta) = dN/d\theta$, hvor $N = N(\theta)$ er antallet nøytrinoer som kommer innenfor vinkelen θ fra strålingsretningen. Tilsvarende gir $n_L(\theta') = dN/d\theta'$ vinkelfordelingen i labsystemet. Ved uniform fordeling i hvilesystemet, vis at fordelingen $n_0(\theta)$ er gitt ved

$$n_0(\theta) = \frac{N_{tot}}{2}\sin\theta \tag{5}$$

hvor $N_{tot} = N(\pi)$ er det totale antall nøytrinoer, spredd i alle retninger. Finn den tilsvarende funksjon $n_L(\theta')$ i laboratoriesystemet.

OPPGAVE 3
Ladet partikkel i magnetfelt.

Ladete partikler som beveger seg i et magnetfelt vil tendere til å spiralere rundt de magnetiske flukslinjene. Hvis flukslinjene konvergerer, vil partiklenes bevegelse i retning langs magnetfeltet stoppe opp og de sendes tilbake i motsatt retning. Dette er et velkjent fenomen i sammenheng med det jordmagnetiske felt hvor ladete partikler fra sola kan fanges inn i en bevegelse langs feltlinjene med refleksjon mellom polene. Et resultat av dette er oppbyggingen av strålingsbeltet (Størmer- van Allen-beltet) rundt jorda

I denne oppgaven studerer vi fenomenet i en forenklet utgave, hvor magnetfeltet i hovedsak er homogent (konstant i rommet), med retning langs z-aksen, men med at lite inhomogent tillegg som gjør at feltlinjene har en langsom konvergens mot z-aksen.

a) Anta først at magnetfeltet $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{k}$ er tidsuavhengig og homogent. En ladet partikkel med ladning q og masse m beveger seg i feltet. Den har (ved $t = 0$) en utgangshastighet $\mathbf{v}_0$, hvor u_0 er hastighetskomponenten i z-retningen og $\mathbf{w}_0$ er hastighetskomponent i x, y-planet. Gjør rede for størrelsen og retningen til kraften som virker på partikkelen. Vis at bevegelsen generelt er en skruelinje om en akse i z-retningen, og at vinkelhastigheten rundt aksen er

$$\omega_0 = -\frac{q}{m}B_0 \tag{6}$$

Finn radius ρ_0 i sirkelbevegelsen rundt aksen.

I det følgende innfører vi et inhomogent tillegg til magnetfeltet. Uttrykt i sylinderkoordinater er vektorpotensialet

$$A_\rho = 0 \quad A_\phi = \frac{1}{2}\rho B_0 f(z) \quad A_z = 0\,. \tag{7}$$

med

$$f(z) = 1 + z^2/d^2 \tag{8}$$

hvor d er en typisk avstand som har å gjøre med forandringen i styrken på magnetfeltet.

b) Vis at magnetfeltet har følgende komponenter i sylinderkoordinater,

$$B_\rho = -\frac{1}{2}\rho B_0 \frac{df}{dz} \quad B_\phi = 0 \quad B_z = B_0 f(z)\,. \tag{9}$$

c) Sett opp uttrykket for Lagrangefunksjonen og Lagranges ligninger i sylinderkoordinater.

d) Vi antar at følgende relasjoner er (tilnærmet) oppfylt

$$\dot\rho = 0\,, \quad \dot\phi = -\frac{q}{m}B_z \tag{10}$$

Gi en begrunnelse for når dette kan være en god tilnærmelse?

d) Vis at med tilnærmelsenene ovenfor har vi følgende ligninger

$$\begin{aligned} qB_z\rho^2 &= -L_z \\ \frac{1}{2}m\dot z^2 - \frac{1}{2m}qB_zL_z &= T \end{aligned} \tag{11}$$

hvor L_z og T er bevegelseskonstanter. Kan du gi en fysisk fortolkning av disse størrelsene?

e)Vi antar følgende initialbetingelser,

$$z = 0 \quad \rho = \rho_0 \quad \dot z = u_0 \tag{12}$$

Vis at bevegelsen til partikkelen i z-retningen er begrenset av ytterpunkter $\pm a$ og bestem a. Skisser bevegelsen i en figur som viser feltlinjene og partikkelbanen