

FYS 3120: Klassisk mekanikk og elektrodynamikk

Formelsamling (bokmål)

1 Analytisk mekanikk

Lagrangefunksjonen

$$L = L(q, \dot{q}, t) , \quad (1)$$

er en funksjon av systemets *generaliserte koordinater* $q = \{q_i ; i = 1, 2, \dots, d\}$ og deres tidsderiverte $\dot{q} = \{\dot{q}_i ; i = 1, 2, \dots, d\}$. Lagrangefunksjonen kan også ha en *eksplisitt* tidsavhengighet t .

Lagranges ligninger

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (2)$$

Det er én ligning for hver generalisert koordinat, og dermed én ligning for hver av systemets frihetsgrader.

Generalisert driv (bevegelsesmengde)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (3)$$

oftest referert til som *kanonisk konjugert* driv. Det er en generalisert driv p_i for hver generalisert koordinat q_i .

Hamiltonfunksjonen

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^d \dot{q}_i p_i - L \quad (4)$$

blir vanligvis uttrykt som en funksjon av de generaliserte koordinatene q_i og deres konjugerte driv p_i .

Hamiltons ligninger

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5)$$

$$(6)$$

Standarduttrykk for L og H

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ H &= T + V \end{aligned} \quad (7)$$

med T som kinetisk energi og V som potensiell energi. I noen tilfeller er H ikke den totale energien.

Ladet partikkel i elektromagnetisk felt (ikke-relativistisk)

$$\begin{aligned} L = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\ H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \end{aligned} \quad (8)$$

2 Relativitetsteori

Tidrom-koordinater

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}) \quad (9)$$

Generell Lorentz-transformasjon

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (10)$$

Spesiell Lorentz-transformasjon med hastighet v i x retningen

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \end{aligned} \quad (11)$$

med $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Koordinatene x^2 og x^3 er uendret.

Betingelse på Lorentz-transformasjonens matriseelementer

$$g_{\mu\nu} L_\rho^\mu L_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \quad (12)$$

Invariant linje-element

$$\Delta s^2 = \Delta \mathbf{r}^2 - c^2 \Delta t^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu \quad (13)$$

Metrisk tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ -1, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \end{cases}$$

Hevet og senket indeks

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu, & (x^\mu) &= (ct, \mathbf{r}), & (x_\mu) &= (-ct, \mathbf{r}) \\ x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\nu, & g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} &= \delta_\mu^\nu \end{aligned} \quad (14)$$

Egentid - tidsdilatation

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (15)$$

$d\tau$: egentidsintervall = tid målt i det momentante hvilesystemet (på en tenkt klokke som beveger seg med legemet)

ds^2 : invariant linje-element for en infinitesimal del av legemets verdenslinje

dt : koordinattid-interval = tidsintervall målt i et vilkårlig valgt inertialsystem

Lengdekontraksjon

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 \quad (16)$$

Lengden til et legeme som beveger seg, målt i bevegelsesretningen.

L_0 : lengden målt i legemets hvilesystem

L : lengden målt (ved samtidighet) i et vilkårlig valgt inertialsystem

Firerhastighet

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}), \quad U^\mu U_\mu = -c^2 \quad (17)$$

Firerakselerasjon

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \quad \mathcal{A}^\mu U_\mu = 0 \quad (18)$$

Egenakselerasjon \mathbf{a}_0

Akselerasjon målt i det momentane hvilesystem,

$$\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = \mathbf{a}_0^2 \quad (19)$$

Firer-driv

$$p^\mu = m U^\mu = m\gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \quad (20)$$

med m som (hvile-) massen til legeme i bevegelse.

Relativistisk energi

$$E = \gamma mc^2 \quad (21)$$

γm blir av og til omtalt som den *relativistiske massen*.

3 Elektrodynamikk

Maxwells ligninger

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Maxwells ligninger på kovariant form

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\end{aligned}\tag{23}$$

Elektromagnetisk felttensor

$$\begin{aligned}F^{0k} &= \frac{1}{c} E_k, \quad F^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \\ \tilde{F}^{0k} &= -B_k, \quad \tilde{F}^{ij} = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} E_k\end{aligned}\tag{24}$$

Firer-strømtetthet

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})\tag{25}$$

Ladningsbevaring

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0\tag{26}$$

Elektromagnetiske potensialer

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\tag{27}$$

Firerpotensialer

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (A^\mu) = \left(\frac{1}{c}\phi, \mathbf{A}\right)\tag{28}$$

Lorentz-kraften

Kraft fra elektromagnetisk felt på punktpartikkelen med ladning q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\tag{29}$$

Potensialer fra ladnings- og strømfordelinger

i Lorentz-gauge, $\partial_\mu A^\mu = 0$:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\end{aligned}\tag{30}$$

Retardert tid

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \tag{31}$$

Electrisk dipolmoment

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \tag{32}$$

Elektrisk dipolpotensial (dipol i origo)

$$\phi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (33)$$

Kraft og kraftmoment (om origo)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (34)$$

Magnetisk dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \quad (35)$$

Magnetisk dipolpotensial (dipol i origo)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{n}}{4\pi r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (36)$$

Kraft og kraftmoment (om origo)

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \text{ (strømsløyfe)}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (37)$$

Lorentz-transformasjon av de elektromagnetiske feltkomponentene

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (38)$$

Lorentz-invarianter

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2 &= -\frac{c^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= \frac{c}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (39)$$

Spesielle Lorentz-transformasjoner

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{||} &= \mathbf{E}_{||}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{||} &= \mathbf{B}_{||}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2) \end{aligned} \quad (40)$$

Feltene er dekomponert i en parallelkomponent (||), langs retningen til transformasjonshastigheten \mathbf{v} , og en ortogonalkomponent (⊥), vinkelrett på \mathbf{v} .

Eletromagnetisk feltenergitetthet

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2 B^2) \quad (41)$$

Elektromagnetisk energi-strømtetthet (Poyntings vektor)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (42)$$

Monokromatisk planbølge, planpolarisert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) , \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) ; \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 , \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}\end{aligned}\quad (43)$$

Monokromatisk planbølge, sirkulærpolarisert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} (\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]) , \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} (\mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]) , \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mp i \mathbf{e}_1)\end{aligned}\quad (44)$$

Polarisasjonsvektorer

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0 , \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 , \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \quad (45)$$

Firer-bølgevektorer

$$(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) , \quad \omega = ck \quad (46)$$

Strålingsfelt, i bølgesonen ($r \gg r', \lambda$)

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{n}}{r} \times \frac{d}{dt} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}\end{aligned}\quad (47)$$

Elektrisk dipolstråling

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{n}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) , \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n} \quad (48)$$

Stråling fra akselerert, ladet partikkel

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi c r} [\mathbf{a} \times \mathbf{n}]_{ret} , \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}_{ret} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{R}/R , \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)\end{aligned}\quad (49)$$

med $\mathbf{r}(t)$ som partikkelenes posisjonsvektor.

Strålingseffekt, Larmors formel

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \mathbf{a}^2 \quad (50)$$