

FYS 3120: Klassisk mekanikk og elektrodynamikk

Formelsamling (nynorsk)

1 Analytisk mekanikk

Lagrangefunksjonen

$$L = L(q, \dot{q}, t) , \quad (1)$$

til eit fysisk system er ein funksjon av dei *generaliserte koordinatane* til systemet, $q = \{q_i ; i = 1, 2, \dots, d\}$, og deira tidsderiverte $\dot{q} = \{\dot{q}_i ; i = 1, 2, \dots, d\}$. Lagrangefunksjonen kan også avhenge *eksplisitt* av tida t .

Lagranges likningar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (2)$$

Det er ei likning for kvar generaliserte koordinat.

Generalisert driv (rørslemengd)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (3)$$

oftast kalt *kanonisk konjugert* driv. Det er ein kanonisk konjugert driv p_i for kvar generaliserte koordinat q_i .

Hamiltonfunksjonen

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^d \dot{q}_i p_i - L \quad (4)$$

oftast uttrykt som ein funksjon av dei generaliserte koordinatane q_i og drivene p_i .

Hamiltons likningar

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (5)$$

(6)

Standarduttrykk for L og H

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ H &= T + V \end{aligned} \quad (7)$$

med T som kinetisk energi og V som potensiell energi. Ved nokre høve er H ikkje den totale energien.

Ladd partikkelen i elektromagnetisk felt (ikkje-relativistisk)

$$\begin{aligned} L = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\ H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \end{aligned} \quad (8)$$

2 Relativitetsteori

Tidrom-koordinatar

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}) \quad (9)$$

Generell Lorentz-transformasjon

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (10)$$

Spesiell Lorentz-transformasjon med hastighet v i x retninga

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \end{aligned} \quad (11)$$

med $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Koordinatane x^2 og x^3 er uendra.

Føring på Lorentz-transformasjonens matriseelement

$$g_{\mu\nu} L_\rho^\mu L_\sigma^\nu = g_{\rho\sigma} \quad (12)$$

Invariant line-element

$$\Delta s^2 = \Delta \mathbf{r}^2 - c^2 \Delta t^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu \quad (13)$$

Metrisk tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ -1, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \end{cases}$$

Heva og senka indeksar

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu, & (x^\mu) &= (ct, \mathbf{r}), & (x_\mu) &= (-ct, \mathbf{r}) \\ x^\mu &= g^{\mu\nu} x_\nu, & g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} &= \delta_\mu^\nu \end{aligned} \quad (14)$$

Eigentid - tidsdilatation

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (15)$$

$d\tau$: eigentidsintervall = tid målt i det momentante kvilesystemet (på ei tenkt klokke som følgjer lekamen)

ds^2 : infinitesimalt invariant linje-element langs verdslien til lekamen

dt : koordinattid-interval = tidsintervall målt i eit vilkårleg valt inertialsystem

Lengdkontraksjon

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 \quad (16)$$

Lengda, i rørsleretninga, til ein lekam i rørsle.

L_0 : lengda målt i lekamens kvilesystem

L : lengda målt (ved lik tid) i eit vilkårleg valgt inertialsystem

Firerhastigkeit

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \mathbf{v}), \quad U^\mu U_\mu = -c^2 \quad (17)$$

Firerakselerasjon

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \quad \mathcal{A}^\mu U_\mu = 0 \quad (18)$$

Eigenakselerasjon \mathbf{a}_0

Akselerasjon målt i det momentane kvilesystemet,

$$\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = \mathbf{a}_0^2 \quad (19)$$

Firer-driv (firer-rørslemengd)

$$p^\mu = m U^\mu = m\gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \quad (20)$$

med m som (kvile-) massen til lekamen

Relativistisk energi

$$E = \gamma mc^2 \quad (21)$$

γm vert av og til kalla den *relativistiske massen*.

3 Elektrodynamikk

Maxwells likningar

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{j} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Maxwells likningar på kovariant form

$$\begin{aligned}
\partial_\nu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\
\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{23}$$

Elektromagnetisk felttensor

$$\begin{aligned}
F^{0k} &= \frac{1}{c} E_k, \quad F^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \\
\tilde{F}^{0k} &= -B_k, \quad \tilde{F}^{ij} = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} E_k
\end{aligned} \tag{24}$$

Firer-straumtettleik

$$(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j}) \tag{25}$$

Ladningsbevaring

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{26}$$

Eletromagnetiske potensial

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{27}$$

Firerpotensial

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (A^\mu) = \left(\frac{1}{c}\phi, \mathbf{A} \right) \tag{28}$$

Lorentz-krafta

Krafta frå eit elektromagnetisk felt på ein punktpartikkel med ladning q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{29}$$

Potensial frå ladnings- og straumfordelingar

i Lorentz-gauge, $\partial_\mu A^\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'
\end{aligned} \tag{30}$$

Retardert tid

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (31)$$

Elektrisk dipolmoment

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (32)$$

Elektrisk dipolpotensial (dipol i origo)

$$\phi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (33)$$

Kraft og kraftmoment (om origo)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (34)$$

Magnetisk dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \quad (35)$$

Magnetic dipolpotensial (dipol i origo)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{n}}{4\pi r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (36)$$

Kraft og kraftmoment (om origo)

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \text{ (straumsløyfe)}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (37)$$

Lorentz-transformasjon av dei elektromagnetiske feltkomponentane

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (38)$$

Lorentz-invariantar

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2 &= -\frac{c^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= \frac{c}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (39)$$

Spesielle Lorentz-transformasjoner

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{||} &= \mathbf{E}_{||}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{||} &= \mathbf{B}_{||}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2) \end{aligned} \quad (40)$$

Felta er dekomponerte i ein parallelkomponent (||), langs retninga til transformasjonshastigheita \mathbf{v} , og ein ortogonalkomponent (\perp), vinkelrett på \mathbf{v} .

Elektromagnetisk feltenergitettleik

$$u = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (41)$$

Elektromagnetisk energistraum-tettleik (Poyntings vektor)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (42)$$

Monokromatiske planbølgjer, planpolarisert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t); \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} \end{aligned} \quad (43)$$

Monokromatiske planbølgjer, sirkulærpolarisert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} (\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]) , \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} (\mathbf{B}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]) , \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mp i \mathbf{e}_1) \end{aligned} \quad (44)$$

Polarisasjonsvektorar

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \quad (45)$$

Firer-bølgjevektorar

$$(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad \omega = ck \quad (46)$$

Strålingsfelt, i bølgjesona ($r \gg r', \lambda$)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{n}}{r} \times \frac{d}{dt} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV', \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (47)$$

Elektrisk dipolstråling

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\mathbf{n}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n} \quad (48)$$

Stråling frå akselerert, ladd partikkel

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi c r} [\mathbf{a} \times \mathbf{n}]_{ret}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}_{ret} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{R}/R, \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (49)$$

med $\mathbf{r}(t)$ som posisjonsvektoren til partikkelen.

Strålingseffekt, Larmors formel

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \mathbf{a}^2 \quad (50)$$