FYS3140. Første obligatoriske innlevering. Frist: 20.februar

Oppgave 1
Finn en Laurent-rekkeutvikling for funksjonen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

som konvergerer for:

a) |z|<1
b) 1<|z|<2
c) |z|>2
d) |z-1|>1
e) 0<|z-2|<1

Hint: Skriv f(z) som en sum av to brøker.

Oppgave 2
Bruk Cauchys integralteorem, Cauchys integralformel eller integral-uttrykket for den deriverte til å bestemme følgende integraler, alle tatt rundt en sirkel med |z|=2:

a) $\oint \frac{\cos z}{z} dz$

b) $\oint \frac{e^z}{z-1} dz$

c) $\oint \frac{2z^2+3z-1}{z-1+i} dz$

d) $\oint \frac{e^z}{(z-1)^2} dz$

e) $\oint \frac{\sin z}{z^4} dz$ (svar: $-\frac{p\,i}{3}$)

Oppgave 3
Bruk residy-teoremet til å beregne følgende integraler:

a) $\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$, C: sirkelen $|z-2i| = 1$

b) $\oint_C \frac{\cosh p z}{z(z^2+1)} dz$, C: sirkelen $|z| = 2$ (svar: $4p\,i$)

c) $\oint_C z e^{\frac{1}{z}} dz$, C: sirkelen $|z| = 2$ (svar: p i)

Oppgave 4
Bruk residyteoremet til å vise at

$$\int_0^{2p} \frac{dq}{1+\sin^2 q} = p\sqrt{2}$$

Oppgave 5

Oppgave 20.28 fra læreboka (se hint).

Anta $\oint_C f(z)dz \to 0$ når R$\to\infty$, der C er en sirkel om origo med radius R. Er dette opplagt?