HJEMMEEKSAMEN FYS3140 VÅREN 2004
(Frist for innlevering: Fredag 30.april)

Oppgave 1

a) Den Fouriertransformerte til en funksjon f(t) er gitt ved

$$F(w) = \frac{e^{-ibw}}{w^2 + a^2} \ ,$$

der a og b er reelle konstanter, a>0 og b>0. Funksjonen f(t) er da gitt ved

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibw} e^{iwt}}{w^2 + a^2} dw \ .$$

Bestem dette integralet og dermed f(t) ved å anta at ω er en kompleks variabel, og velg en passende integrasjonsvei i det komplekse planet. (Hint: Du kan få bruk for Jordans lemma. Observer at t-b kan være både positiv og negativ. Se også oppgave 13.1a i læreboka).

b) Anta nå at vi har

$$F(w) = \frac{1}{w^2 - a^2} \ , \ a \text{ er reell og } a > 0 \ .$$

Finn f(t) som under a) ved å la ω være en kompleks variabel. (Hint: Du må nå bestemme prinsipalverdien av integralet).

(svar b): $f(t) = -\sqrt{\frac{p}{2}} \frac{1}{a} \sin a|t|$)

Oppgave 2

Løs Laguerres differensialligning

$$xy'' + (1 - x)y' + l\,y = 0$$

ved Fröbenius-metoden. Du vil finne $s_1 = s_2$, dvs. du finner bare en løsning, og skal ikke prøve å finne en annen.

Gjør rede for at løsningen du har funnet blir et polynom av grad N dersom du antar λ=N, der N er et helt tall, $N \geq 0$. Vis at i dette tilfelle blir løsningen

$$y_N(x) = a_0 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!(n!)^2} x^n \ .$$

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven se på løsningen av differensialligningen

$$x'' + 2x' + (1 + k^2)x = F(t) \ , \ k \neq 0 \ ,$$

med betingelsene x(0)=x'(0)=0. Denne ligningen kan for eksempel representere bevegelsen til en dempet oscillator med ytre påtrykt kraft F(t).

a) Anta F(t)=H(t), der H(t) er Heaviside step-funksjon. Løs ligningen ved hjelp av Laplace-transformasjon. Til å invertere Laplace-transformasjonen kan du bruke foldingsteoremet ("Convolution theorem") eller delbrøkoppspalting. Prøv begge deler!

Med en mer generell form for kraften F(t) kan det fort bli problemer med Laplace-transformasjonen. Teknikken med Greens-funksjon kan da være best egnet.

b) Skriv ned differensialligningen for Greens-funksjonen G(t,τ) for problemet vårt. Gjør rede for at vi har

$$x(t) = \int_0^\infty G(t,t)F(t)dt \ .$$

Vis at G(t,τ) er gitt ved

$$G(t,t) = e^{-t}\left[A(t)\cos kt + B(t)\sin kt\right] \ , \ t < t$$
$$G(t,t) = e^{-t}\left[C(t)\cos kt + D(t)\sin kt\right] \ , \ t > t$$

c) Gjør rede for at vi kan anta G(0,τ)=0 og $\frac{d}{dt}G(t,t)|_{t=0} = 0$. Bruk disse betingelsene sammen med kravene til G(t,τ) og $\frac{d}{dt}G(t,t)$ ved t=τ til å bestemme A(τ), B(τ), C(τ) og D(τ).

d) Vis at

$$G(t,t) = \frac{1}{k}e^{-(t-t)}\sin k(t-t) \ , \ t > t$$
$$G(t,t) = 0 \ , \ t < t \ .$$

e) Finn x(t) for F(t)=H(t). Kjenner du igjen integralet for x(t) fra a)?

Du bør uansett metode finne

$$x(t) = \frac{1}{1+k^2}\left[1 - e^{-t}\cos kt - \frac{1}{k}e^{-t}\sin kt\right] \ .$$

Oppgave 4

Eksamen FYS211 1995 oppgave 4 (Se kompendium med oppgaver for FYS211).