Kortfattet løsning eksamen FYS3140/4140 våren 2004

Oppgave 1

a) Cauchys integralformel gir $I_1=2\pi i$.
Fra integraluttrykket for den 2.deriverte finnes $I_2=-\pi i$.
Cauchys integralformel gir for I_3

$$I_3 = \oint_{|z|=2} \frac{e^{az}}{z^2+1}dz = \oint_{|z|=2} \frac{e^{az}}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)dz = 2p\, i \sin a \ .$$

b) Integrasjonsvei: -R til +R langs den reelle akse, halvsirkel i øvre halvplan.

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}dx = \frac{p}{2}e^{-ab}$$

(Husk Jordans lemma). For a=0 går ikke integralet over halvsirkelen mot 0 når $R\to\infty$, men får verdien πi.

Oppgave 2

Indeksligningen blir $a_0 s(s-1)=0$, med løsninger $s_1=1$ og $s_2=0$.
Prøver den laveste s-verdien s=0, som gir relasjonen

$$a_{n+2} = \frac{2n-8}{(n+1)(n+2)}a_n$$

Betingelsen y(0)=3 gir da $a_0=3$, og betingelsen y'(0)=0 gir $a_1=0$. Videre bryter rekka av etter a_4. Løsningen blir:

$$y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4 \ .$$

s=1 gir ingen løsning som passer med de gitte betingelsene.

Oppgave 3

Den Laplace-transformerte er gitt ved differensialligningen

$$x\frac{d}{dx}U(x,s) + sU(x,s) = \frac{x}{s^2} \ , \ \ s>0 \ .$$

Løser først den homogene ligningen, og finner løsningen

$$U_h(x,s) = \frac{C(s)}{x^s}$$

Videre ser vi at en partikulær løsning av den inhomogene ligningen har formen

$$U_p(x,s) = xf(s)\text{ , som innsatt gir } f(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}\ .$$

Løsningen for den Laplace-transformerte U(x,s) blir da

$$U(x,s) = \frac{C(s)}{x^s} + \frac{x}{s^2(s+1)} = \frac{C(s)}{x^s} + x\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)\ .$$

C(s) bestemmes så av betingelsen u(0,t)=0, som gir U(0,s)=0, som krever C(s)=0. Løsningen blir da

$$u(x,t) = x(t-1+e^{-t})\ .$$

Oppgave 4

a) Dette er en Abelsk gruppe med fire elementer, som dermed også har fire klasser. Da har også gruppen fire ikke-reduserbsre representasjoner, som alle må være en-dimensjonale etter regelen $\sum_a n_a^2 = g = 4.$ Undergruppe er $\{E, G^2\}$.

b) $z^4 = 1$ har løsningene $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$,
dvs. fire løsninger, en for hver av de fire ikke-reduserbare representasjonene.

Karaktertabellen blir med $c^{(a)}(G^m) = z^m$:

		$E = G^4$	G	G^2	G^3
$z_1 = 1$	$D^{(1)}$	1	1	1	1
$z_2 = -1$	$D^{(2)}$	1	-1	1	-1
$z_3 = i$	$D^{(3)}$	1	i	-1	$-i$
$z_4 = -i$	$D^{(4)}$	1	$-i$	-1	i