Kortfattet løsning eksamen FYS3140/4140 våren 2005

Oppgave 1

a) $z = |z| e^{iq} = |z| e^{i(q+2kp)}$, $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i(q+2kp)/2}$.

$$\sqrt{i} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \ , \quad \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) \ .$$

b)

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z_0) + f_1'(z_0)(z-z_0) + \cdots}{f_2'(z_0)(z-z_0) + \cdots} \ ,$$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \frac{f_1(z_0)}{f_2'(z_0)} \ .$$

c) Poler i øvre halvplan for $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ og $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$.

Finner enklest residyene ved å bruke resultatet fra b):

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \operatorname{Res} f(z_2) = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \ .$$

$$I = \frac{p}{\sqrt{2}} \ .$$

Oppgave 2

a) Den homogene delen av ligningen:

$$y_h'' + \frac{2}{x} y_h' = 0 \ ,$$

gir ved bruk av Frøbeniusmetoden relasjonen

$$a_n(n+s)(n+s+1) = 0 \ \text{ for alle } n \ , \ a_0 \neq 0 \ .$$

Indeksligningen blir $s(s+1)=0$, og løsningen $s=-1$ gir

$a_n(n-1)n = 0$ for alle n, dvs. a_1 kan velges fritt og $a_n=0$ for $n>1$.

Løsningen blir dermed

$$y_h(x) = \frac{a_0}{x} + a_1 \ .$$

b) Vi bruker metoden med variasjon av konstantene til å finne en partikulær løsning på formen

$$y_p(x) = C_1(x) + \frac{C_2(x)}{x} \ .$$

Resultatet blir $C_1(x) = \ln x = \ln|x| + \text{konstant}$, $C_2(x) = -x$. (konstanten inkluderes i a_1 i $y_h(x)$). Den generelle løsningen får da formen

$$y(x) = A + \frac{B}{x} + \ln|x| \ ,$$ der A og B er ubestemte konstanter.

Oppgave 3

a) f(x,t)=F(x)T(t). Ved å velge en positiv separasjonskonstant, dvs. λ^2 ,finnes

$F(x) = Cx^{l^2}, \quad T(t) = De^{lt} + Ee^{-lt}$, og løsningen blir på formen $f(x,t) = x^{l^2}(Ae^{lt} + Be^{-lt})$. Valg av negativ separasjonskonstant, dvs. $-\lambda^2$ ville gi en løsning på formen $\frac{1}{x^{l^2}}(A'e^{ilt} + B'e^{-ilt})$, som ikke passer med betingelsene under b) nedenfor.

b) Betingelsene er oppfylt for A=0, B=λ=1, og løsningen blir

$$f(x,t) = xe^{-t} \ .$$

c) Differensialligningen for den Laplacetransformerte F(s,x) blir

$$x\frac{dF(s,x)}{dx} - s^2F(s,x) = x(1-s) \ .$$

d) Den Laplacetransformerte av den spesielle løsningen funnet under b) er x/(s+1), som da må være en partikulær løsning av diff.ligningen for F(s,x). Løsningen av den homogene delen av ligningen for F(s,x) er

$F_h(s,x) = C(s)x^{s^2}$, og den komplette løsningen for de gitte betingelsene blir

$$F(s,x) = C(s)x^{s^2} + \frac{x}{s+1} \ .$$