

UiO : Fysisk institutt
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

FYS3220 – Lineær kretselektronikk

Digital signalbehandling
Kontinuerlige og diskrete transformer

Sverre Holm

Kontinuerlige og diskrete transformer

- Fouriertransform, Fourierrekke ⇔ Tids-diskret Fouriertransform, Diskret Fouriertransform (DFT)
- Fra Laplace- til z-transform
- Forhold mellom s-plan og z-plan

Fire typer Fourier-transform

Kontinuerlig tid:

- Aperiodisk: Fouriertransform
  - Eksponensial, gaussisk, … ingen gjentakelse
- Periodisk: Fourierrekke
  - Sinus, firkant, … som gjentar seg

Diskret tid:

- Aperiodisk: tids-diskret Fouriertransform
  - Samplet, ingen repetisjon, uendelig
  - DTFT
- Periodisk: Diskret Fouriertransform
  - Periodisk, gjentar seg
  - DFT, kalles også diskret Fourierrekke

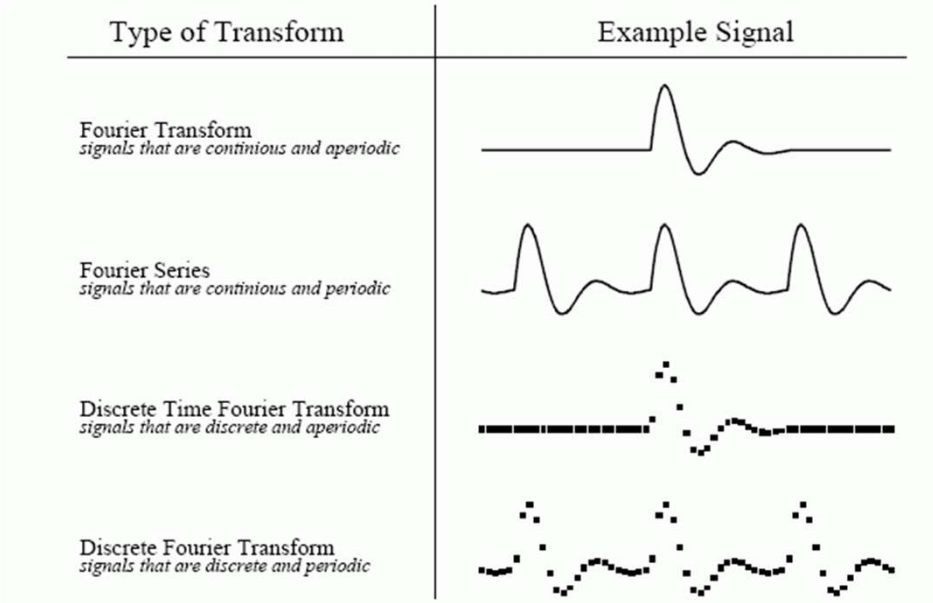


FIGURE 8-2
Illustration of the four Fourier transforms. A signal may be continuous or discrete, and it may be periodic or aperiodic. Together these define four possible combinations, each having its own version of the Fourier transform. The names are not well organized; simply memorize them.

http://www.dspguide.com/ch8/1.htm

Endelig antall diskret samples?

- Bare DFT som kan implementers i praksis
  - Fast Fourier transform, FFT - effektiv beregningsalgoritme for DFT
- Diskret Fourier Transform:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\mathrm{i}2\pi n/N}$$

- Invers Diskret Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\mathrm{i}2\pi k/N}$$

Fra Laplace- til z-transform

Analoge filtre:

- Differensialligninger

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \cdots = 0$$

- Laplace-transform:

$$X(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

- Kartesisk s-plan
- Poler, nullpunkter

Digital filtre:

- Differanseligninger

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots = 0$$

- Z-transform:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Polart z-plan
- Poler, nullpunkter

Fra Laplace til z-transform

Laplace:

$$X(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \;\; \& \;\; s = \sigma + \mathrm{j}\omega \;\; \Rightarrow \;\; X(\sigma,\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

1. Kontinuerlig → diskret, t=nT, T = sampleintervall:

$$X(\sigma,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\sigma nT}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}$$

(utgang er kontinuerlig)

2. Skriv om eksponsialledd:

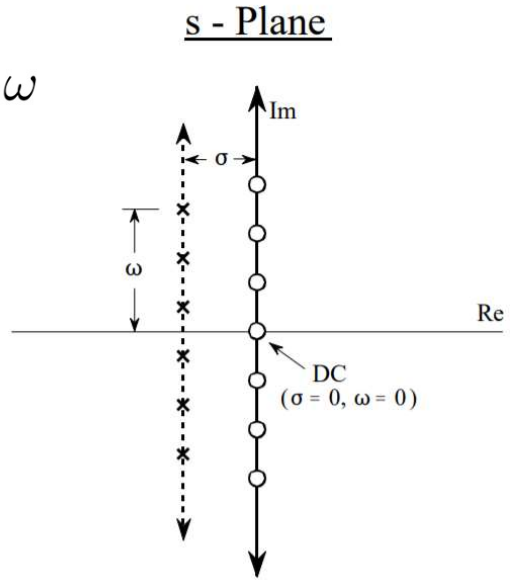
$$r^{-n} = [\mathrm{e}^{\ln r}]^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln r} = \mathrm{e}^{-\sigma n}|_{\sigma=\ln r} \;\; \Rightarrow \;\; X(r,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-nT}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}$$

3. Mer kompakt notasjon, standardformen for z-transform:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} \;\; \Rightarrow \;\; X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-nT}$$

Forhold mellom s-plan og z-plan

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$



$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} = \mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} = \mathrm{e}^{sT}$$

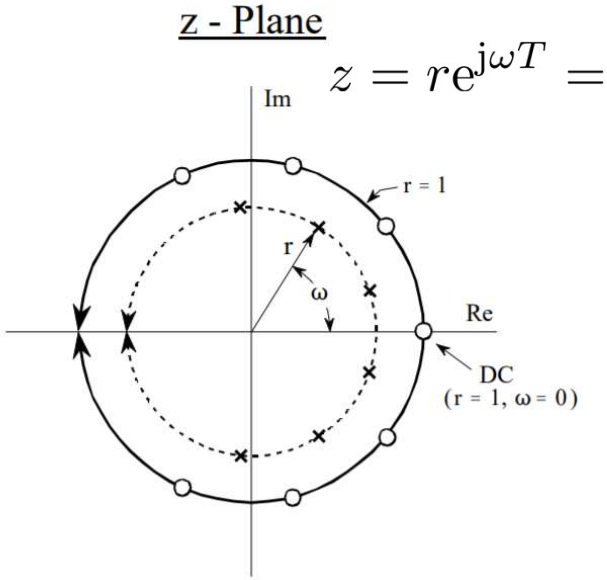


Fig: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Steven W. Smith

FIGURE 33-2
Relationship between the s-plane and the z-plane. The s-plane is a rectangular coordinate system with σ expressing the distance along the real (horizontal) axis, and ω the distance along the imaginary (vertical) axis. In comparison, the z-plane is in polar form, with *r* being the distance to the origin, and ω the angle measured to the positive horizontal axis. Vertical lines in the s-plane, such as illustrated by the example poles and zeros in this figure, correspond to circles in the z-plane.

Forhold mellom s-plan og z-plan

$$z = re^{j\omega T} = e^{\sigma} e^{j\omega T} = e^{sT}$$

Kartesisk vs polar

- Linjer ⇔ sirkler (se poler og nullpunkt i plott)

Vertikal akse, s-plan ⇔ enhetssirkel, z-plan

- Venstre halvplan ⇔ innenfor enhetssirkel
- Stabilitet ⇔ poler innenfor enhetssirkel i z-planet

Frekvensakse:

- Kontinuerlig signal, ω: 0 – uendelig
- Diskret: ofte Ω for å skille fra analog ω: 0 – $\Omega_s/2$ ⇔ 0 – π som gjentar seg: aliasing

Fourier transform:

- Kontinuerlig: reelle akse
- Diskret: enhetssirkel

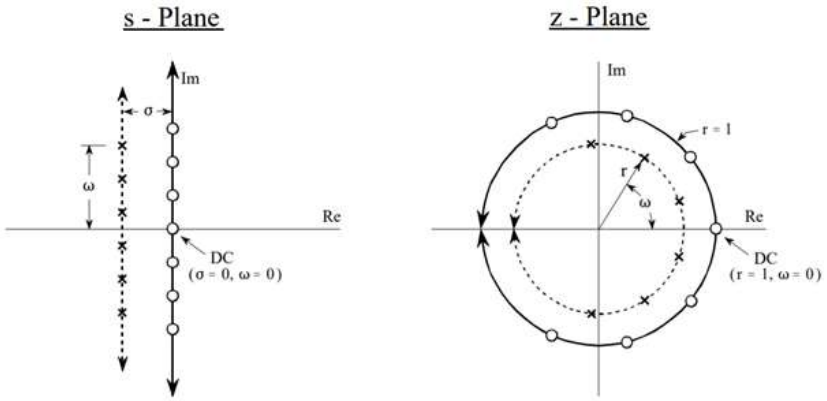


Fig: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Steven W. Smith

Transformasjon fra analog til diskret

1. Impulsinvarians:

   $z^{-1} = \mathrm{e}^{-sT} \Rightarrow s = \frac{1}{T} \ln z$ - brukes i filterdesign

2. Approksimasjon via MacLaurin-rekke:

   $z^{-1} = \mathrm{e}^{-sT} \approx 1 - sT + \frac{(-sT)^2}{2!} + \ldots$

   1. ordens ledd: $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ - brukes i oppgaver

3. Bilineær transformasjon (bedre):

   $$z^{-1} = e^{-sT} = \frac{\mathrm{e}^{-sT/2}}{\mathrm{e}^{sT/2}} \approx \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2}$$

   Løs for s: $s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ - brukes i filterdesign

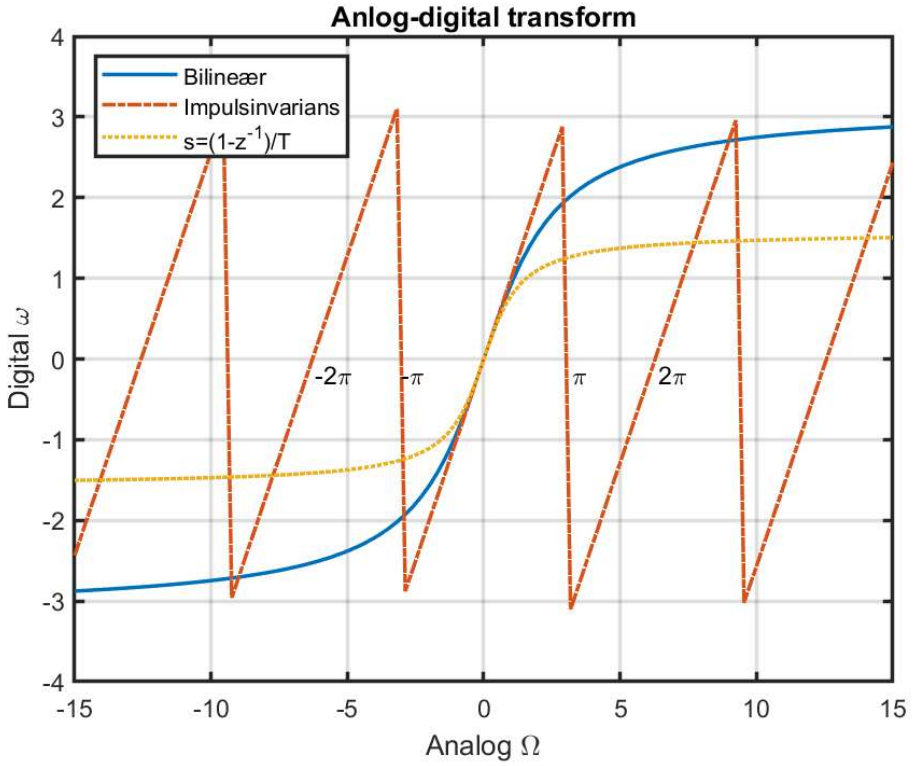
Fra bilineær transform til MacLaurin

- Bilineær: $s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
- MacLaurin: $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$
- Liten frekvens, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big|_{\omega \approx 0} \Rightarrow z \approx 1$

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\bigg|_{z \approx 1} \approx \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + 1} = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

- MacLaurin er mye enklere å regne for hånd!

Fra analog til digital frekvens



Små frekvenser: Alle er like og tilnærmet lineære

- Best egnet for transformasjon av lavpass
- Bilineær: ingen aliasing, men ulineær: $\omega = \frac{\tan \Omega T/2}{T}$
- Impulsinvarians: lineær, men aliasing
- $1\text{-}z^{-1}$ svarer til: $\omega = \frac{\arcsin \Omega T}{T}$