

1977

WILHELM LØCHSTØR

ELEMENTER MALEORI OG USIKKERHETSREGNING

FYSISKE MÅLINGER

INNHOLD

GENERELT OM MÅLING

1	side	Sann verdi, fikseringsverdi. Ideell og reel måling.
2	"	Målefeil, måleusikkerhet.
4	"	Kilder til usikkerhet.

GJENTAKELSESMAÅLINGER

5	"	Fikseringsverdi. Beste verdi. Middelveidi.
5	"	Spredningsmål. Standardavvik.
7	"	Fordeling. Linjediagram. Histogram. Kumulativ fordeling.
8	"	Kontinuerlig fordelingsfunksjon. Gauss-fordeling (Normalfordeling.)
9	"	Andre fordelingsfunksjoner. Poisson-fordeling.
10	"	Noen egenskaper ved fordelingsfunksjoner.
11	"	Gyldighet av formler. Skjønsmessig angivelse av usikkerhet.
12	"	Angivelse av måleresultat. Absolutt og relativ usikkerhet.
13	"	Antall siffer.
13	"	Eksempel.

SAMMENSATTE MÅLINGER

17	"	Usikkerhetsbidrag fra de enkelte målinger.
20	"	Usikkerhet på en sammensatt måling. Summasjon av usikkerhetsbidrag
22	"	Regnenøyaktighet. Overslagsregninger. Antall siffer.
23	"	Eksempler på usikkerhetsberegninger.
26	"	Planlegging av måling. Toleranse og faktisk usikkerhet.
30	"	Hovedtrekk i planlegging og utførelse av måling med toleranse.

GRAFISKE FREMSTILLINGER

35	"	Generelt om tegning av diagrammer.
37	"	Grafisk utjevning.
38	"	Minste kvadraters metode.
39	"	Eksempler på kvantitativ bruk av grafiske fremstillinger.

"Sann verdi" - fikseringsverdi. Ideell og reell måling

Måling tar sikte på en kvantitativ, tallmessig beskrivelse av en størrelse eller et fenomen. En måling innebærer vanligvis en direkte eller indirekte sammenligning av måleobjektet med en nærmere definert størrelse av samme art (enheten). Et fullstendig måleresultat består av måltallet og enheten. Enkelte målinger og måleresultater skiller seg fra dette generelle skjema. F.eks. er temperaturmålinger bare fastsettelse av temperaturnivåer etter nærmere fastsatte regler, og i enkelte tilfelle er måleresultatet ubenevnt som ved brytningsindeks. I det følgende behandles utelukkende måltallet, den rent numeriske side av måleresultatet.

Resultatet av en ideell måling er ett tall som gir måleobjektets sanne verdi.

Ved en virkelig måling, en reell måling, kan vi bare avgrense et tallområde hvor vi mener at den sanne verdi ligger. Hvorvidt et måleobjekt har en "sann verdi" og hvorledes den eventuelt skal defineres, er et åpent spørsmål som vi ikke skal gå inn på her. I det alt overveiende antall tilfeller er et måleobjekt "sanne verdi" en abstraksjon, et rent begrep, på tilsvarende måte som f.eks. et punkt er det. En sann verdi kan aldri finnes ved måling, men kan i visse tilfeller fastslås ved definisjon.

Det er enkelt å bli klar over at vi ved måling bare kan avgrense et tallområde, og ikke helt bestemt angi bare ett tall som måleverdi. La oss f.eks. tenke oss at vi som resultat av en lengdemåling har angitt 2 cm. Vi kan bli spurt om det er sikkert at lengden ikke er 2,1 cm eller 1,9 cm, og vi mener kanskje å kunne utelukke disse verdiene. Hvis så spørgeren går videre og spør om det er sikkert at lengden ikke er 2,05 cm eller 1,95 cm, ja så begynner vi kanskje å tvile, og blir vi presset videre med flere siffer f.eks. 2,001 cm, ja så kan vi ikke si noe sikkert. Selv om vi mener å kunne utelukke en så stor verdi som 2,1 cm og en så liten som 1,9 cm, så er det fremdeles innenfor dette området uendelig mange tall å velge mellom, og målingen gir ikke grunnlag for helt sikkert å velge ett av disse som riktig, og utelukke alle andre som gale verdier. Egentlig kan vi bare si at den lengden som er målt har en eller annen verdi mellom 1,9 og 2,1 cm, eller kanskje målingene har vært slik

at vi mener å kunne si at verdien ligger mellom 1,99 cm og 2,01 cm. Det vil avhenge av hvorledes målingen er utført.

Av praktiske grunner angis også resultatet av en reell måling som ett tall innenfor tallområdet som målingene har avgrenset. Dette estimat eller fikseringsverdi for den sanne verdi behandles i regneoperasjoner og teoretiske relasjoner som om den var den sanne verdi. I måleteorien og usikkerhetsregningen behandles spørsmålene om hvorledes man skal velge slike fikseringsverdier og hvilke begrensninger de har, hvorledes de skal vurderes osv.

Selv om vi regner med et måleresultat som ett tall, så er det vanlig også å angi størrelsen av det tallområdet vi mener å kunne avgrense. Det kan være av betydning om et resultat på 2 cm kan antas å ligge i området 1,9 - 2,1 cm eller f.eks. i området 1,99 - 2,01 cm. Inngår måleverdien i videre beregninger, er det også vanlig å beregne hvilke utslag tallområdet (f.eks. 1,9 - 2,1 cm) vil gi i det beregnede resultat.

Målefeil, måleusikkerhet

Avvik mellom en målt verdi x og den antatt sanne verdi x_0 vil i alminnelighet ha mange årsaker. Vi kan skille mellom to grupper avvik som er vesentlig forskjellige og inbyrdes uavhengige, og som er årsak til det vi kaller målefeil og måleusikkerhet.

I den ene gruppen er avvikene konstante eller systematiske, og gjentar seg på samme måte fra gang til gang. Denslags avvik gir det vi kaller målefeil. De gjør resultatet galt. Dersom avviket er kjent, kan feilen rettes (korrigeres).

Som eksempel kan vi tenke oss at vi har en målestav som er for kort, f.eks. 99 cm istedenfor 100 cm, men delt i 1000 inbyrdes like store "millimeter". Med denne korte staven vil vi alltid få for høye måleverdier. Systematiske avvik kan vi også få om f.eks. målestavens totale lengde er riktig, men delingen i mm er ujevn, slik at strekavstanden er større på noen deler av staven enn på andre steder. Avvikene vil da vise en systematisk avhengig av hvilke deler av staven vi bruker. Veiing uten hensyn til oppdrift i luften er et annet eksempel på systematisk avvik og målefeil.

I den andre gruppen er avvikene tilfeldige, av statistisk natur. Erfaring viser at om man måler en og samme størrelse flere ganger, så vil de enkelte måleverdiene vise en viss spredning. Vi får snart litt høyere, snart litt lavere verdier uten at vi på forhånd kan si noe om

skjedes	konstante eller systematiske avvik	statistiske, tilfeldige avvik
gir	forskryvning av måleverdien	spredning av måleverdiene
gjør resultatet	galt	ubestemt
bestemmer	riktigheten	nøyaktigheten (reproduserbarheten)
kan prinsipielt korrigeres	kan ikke korrigeres, ev. bare reduseres	gir seg utslag og påvises ved gjentagelsesmålinger
kan ikke påvises ved gjentagelsesmålinger		

NOEN KARAKTERISTISKE TREKK VED MÅLEFEIL OG MÅLEUSIKKERHET

Målefeil er bestemmende for hvor riktig måleresultatet er, mens måleusikkerheten er bestemmende for hvor nøyaktig (eller reproduserbart) resultatet er. Riktigheten og nøyaktigheten for en måling er inbyrdes uavhengige. Vi kan gjøre meget nøyaktige målinger som gir galt resultat, eller vi kan gjøre unøyaktige men riktige målinger. Som eksempel kan vi tenke oss måling av en tid. I det ene tilfellet bruker vi et ur slik at vi kan måle på nærmeste 1/1000 sekund. Men så viser det seg at dette uret går for fort. I det andre tilfellet har vi et ur som går riktig, men vi kan bare måle på nærmeste hele sekund. I første tilfelle har vi en nøyaktig måling som gir galt resultat. I annet tilfelle får vi et riktig resultat, men med mindre nøyaktighet. Dersom vi kan fastslå eller få oppgitt hvor meget for fort det første uret går, kan resultatet rettes, og vi får et riktig og nøyaktig resultat. I praksis prøver man å innrette seg slik at nøyaktigheten står i et rimelig forhold til riktigheten. Vi skal her bare beskjeftige oss med måleusikkerheten. Mange steder kalles måleusikkerheten for "tilfeldige feil", mens det vi har kalt målefeil, kalles "systematiske feil".

Kilder til usikkerhet

Noen uttømmende oversikt kan ikke gis da kildene og deres natur til dels er ukjent. Skjematisk kan angis følgende tre hovedkilder som man alltid må regne med:

1. Måleobjektet selv
2. Instrumenter, metode
3. Observatør, forsøksbetingelser

Ad. 1. Allerede i definisjonen av måleobjektet ligger en kilde til usikkerhet, definisjonsubestemthet. Som grove eksempler nevnes: Avstanden Oslo-Drammen, temperaturen i et rom, tykkelse av en ikke helt jevntykk tråd, tettheten av tre, o.l. Usikkerheten kan reduseres ved en skarpere og mere detaljert definisjon av måleobjektet, målebetingelser og måleprosedyre.

Ad. 2. Beror på at alle instrumenter er tekniske frembringelser som bare holder de nominelle spesifikasjoner innenfor visse grenser. Andre momenter er begrenset reproduserbarhet av innstillinger, endelig tykkelse av visere og delstreker, begrenset antall siffer i digitale instrumenter osv.

Ad. 3. På et eller annet stadium i målingene må i allmennelighet obser-

vatøren stille inn måleoppstillingen etter et visst kriterium (trådkors overett med spektrallinje, lik belysning, viser på null, osv.) og senere foreta en avlesning av en viser, strek e.l. i forhold til en skala. Disse innstillinger og avlesninger vil bare kunne foretas med en begrenset nøyaktighet, i siste instans avhengig av at det eksisterer en viss terskelverdi for sansene for at det skal være mulig å avføre om det er forskjell eller ikke, men for øvrig avhengig av mange ytre forhold som lysforhold, rystelser, bekvemme observasjonsmuligheter etc. (forsøksbetingelser). Usikkerhet av denne art kan reduseres ved for-

nftig oppstilling av apparatur og ved spesielle fremgangsmåter ved målingene.

Ofta er avlesningsusikkerheten (kombinasjon av instrument og observatør) en dominerende kilde til usikkerhet. Observatørens øvelse og ferdighet i målinger spiller også en stor rolle.

Fikseringsverdi, Beste verdi, Middelveidi

Erfaring viser at om vi gjentar en maling på samme måte og under samme betingelser, så vil måleresultatene (observasjonene) vise en viss spredning uten at vi kan si at en bestemt enkeltobservasjon er å foretrekke fremfor de andre.

Har vi gjort i alt N observasjoner, kan disse ordnes fortløpende i en tallrekke $x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_N$.

Oftest vil noen av disse N observasjonene være innbyrdes like. Har vi fått n forskjellige verdier, kan tallene $x_1, \dots, x_1, \dots, x_N$ også ordnes slik

Observert verdi: $x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$
 Antall ganger observert: $f_1, \dots, f_k, \dots, f_n$
 hvor $f_1 + \dots + f_k + \dots + f_n = \sum_{i=1}^n f_i = N$

Det egentlige resultat av målingene er samtlige observerte tall,

ordnet på den ene eller den andre måten. For praktisk bruk er dette en tungvint, nærmest umulig, måte å angi resultatet på. Vi må velge ett tall, en fikseringsverdi, som på beste måte representerer samtlige observerte verdier. Derksom de enkelte observasjonene er likeverdige og innbyrdes uavhengige, er den beste fikseringsverdi den aritmetiske middelveidi \bar{x} .

Vi kan også si det slik at middelveidi er det beste estimat for den "sanne verdi".

Middelveidi kan skrives:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^k f_k \cdot x_k$$

hvor N er antall enkeltmålinger, x_i er resultat av observasjon nr. i , n er antall forskjellige måleveidi og f_k er det antall ganger verdien x_k er observert.

Spredningsmål. Standardavvik

Middelveidi sier ikke noe om hvor stor spredningen i de opprinnelige observasjonene er. Det vil være en vesentlig bedre opplysning om målingene dersom vi også angir et spredningsmål. Dette vil si noe om måleusikker-

heten.

En mulig måte å angi spredningen på er å angi differensen mellom

største og minste observerte verdi. Denne differens kalles usikkerhets-
 område eller variasjonsområdet. Halvparten av dette kalles grense-
 avviket.

Denne måten å angi spredningen på har den åpenbare svakhet at
 spredningsmålet er bestemt av bare to av de N verdiene som er
 observert. Et spredningsmål som tar hensyn til alle verdiene, vil være
 mer egnet. Vi skal ikke gå inn på begrunnelsen for et slikt mål, men
 bare nevne at standardavviket s er et slikt spredningsmål som er vanlig
 brukt i forbindelse med målinger.

Standardavviket kan skrives

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Det fremgår at det er de enkelte måleverdiers avstand fra middel-
 verdien \bar{x} (den beste verdien) som er bestemmende for s .

Formelen for standardavviket kan omformes på forskjellige måter som
 kan være mere hensiktsmessige ved den praktiske utførelsen av beregningen.
 Noen eksempler:

$$(N-1)s^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^N N \bar{x}^2 = \sum_{k=1}^n f_k (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n f_k x_k^2 - 2 \bar{x} \sum_{k=1}^n f_k x_k + N \bar{x}^2$$

Standardavviket s slik det er definert her, er et spredningsmål
 for de måleverdiene (den tallrekken) som er brukt for å beregne middel-
 verdien. Den kalles for standardavviket for enkeltmålinger.

Det er rimelig å anta at middelverdien er sikrere jo flere måle-
 verdier vi har hatt å gå ut fra, altså jo større N er. Det er også
 rimelig å anta at dersom vi gjør flere bestemmelser av middelverdien,
 hver gang basert på N observasjoner, så vil spredningen i disse middel-
 verdiene være mindre enn spredningen i hver enkelt tallrekke på N tall.
 Kalles standardavviket for middelverdien for s_m , gjelder

$$s_m = s/\sqrt{N}$$

Det betyr at om vi har bestemt en middelverdi $\bar{x} = m$ på grunnlag
 av n tallrekke på N tall med standardavvik s , så kan vi si at

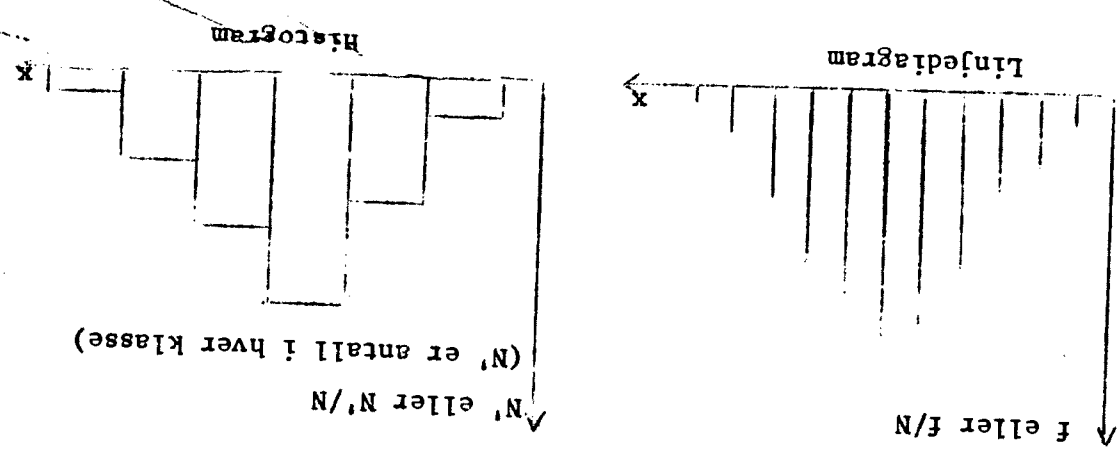
dersom vi gjentar en slik middelverdiestemmelse på samme måte, kan vi
 regne med å få en spredning i disse middelverdier karakterisert ved et

standardavvik s_m . Vi kan altså angi et standardavvik for middelverdien
 på grunnlag av bare en enkelt bestemmelse av \bar{x} .

Resultatet av en gjentakelsesmåling komprimeres oftest til å angi middelveien og standardavviket. Standardavviket brukes som mål for måleusikkerheten.

Fordeling. Linjediagram. Histogram. Kumulativ fordeling.

Hverken x eller s sier noe om hvorledes observasjonene fordeles seg. En oversikt over dette får man best ved inntegning av observasjonene i et linjediagram eller et histogram.



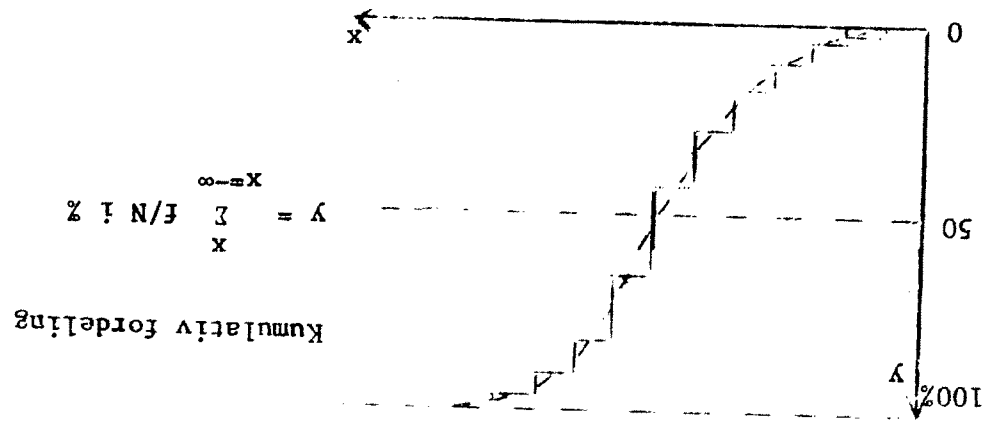
Ved linjediagram avsettes som ordinat en lengde proporsjonal med antall ganger f , vedkommende x -verdi er observert. Oftest angis det relative antall f/N , og ofte i %.

I et histogram deles alle de observerte verdier inn i grupper eller klasser, og man teller opp antall observasjoner i hver klasse. Som ordinat avsettes det absolutte eller det relative antall observasjoner i klassen. Vi får en trappeturve eller søylediagram. Grensene velges alltid mellom to observerte verdier slik at det aldri oppstår tvil om hvilken klasse en bestemt verdi tilhører. Har man f.eks. bare heltallige verdier, vil det være naturlig å sette klassegrensene ved halvtallige verdier.

I visse tilfeller kan det være hensiktsmessig å gi en oversikt over fordelingen ved den kumulative fordeling. Som absisise avsettes klassegrensene på samme måte som ved et histogram. Som ordinatverdi langs hver klassegrense avsettes antall observasjoner som er mindre enn denne. Det er vanlig å avsette det relative antall i %.

I alminnelighet faller flest observasjoner nær middelveien. I dette område vil kurven ha den største stigning. Det finnes spesialpapir for inntegning av slike kumulative fordelinger hvor målestokken på y -aksen er laget slik at kurven blir en rett

Linje dersom observasjonene er normal-fordelt.



Kontinuerlig fordelingsfunksjon. Gauss-fordeling (Normalfordeling)

Fordelingen av en observasjonsrekke kan prinsipielt bare fastslås empirisk, og også bare som en diskontinuerlig funksjon (linjediagram, histogram). Det er imidlertid praktisk å kunne operere med en idealisert kontinuerlig fordelingsfunksjon, som da kan tenkes som en omhyllingskurve for den observerte diskontinuerlige fordeling.

Det er en erfaring at når antall observasjoner N øker, vil omhyllingskurven for et linjediagram eller et histogram nærme seg en grenseform, som er karakteristisk for vedkommende måling. Sett på denne måten er en måling å betrakte som en stikkprøve på en slik grenseform eller fordelingsfunksjon.

Det er videre en erfaring at ved omhyggelig utførte, likeverdige og uavhengige observasjoner vil funksjonen

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

med god tilnærmedelse beskrive omhyllingskurven for observasjoner med middelværdi \bar{x} og standardavvik σ . En slik fordeling kalles normalfordeling eller Gauss-fordeling. Kurven $y = f(x)$ har maksimum ved $x = \bar{x}$, er symmetrisk om denne verdi og går mot null når $x \rightarrow \pm\infty$. Belliggheten på tall-linjen (x -aksen) er bestemt av \bar{x} , formen på kurven er bestemt av σ . Jo mindre σ er, jo høyere og skarpere blir maksimum. Arealet mellom normalfordelingskurven og x -aksen er uavhengig av verdiene for \bar{x} og σ .

P^x er sannsynligheten for å observere et antall pulser x i tiden t .
 x er hele, positive tall (antall pulser). \bar{x} er det gjennomsnittlige antall pulser i tiden t .
 Poisson-fordelingen skiller seg fra normalfordelingen på flere måter. Vi skal peke på to forhold. Poisson-fordelingen er ikke symmetrisk om middelveiden, og det er en bestemt sammenheng mellom middelveiden \bar{x} og standardavviket s , idet $s = \sqrt{\bar{x}}$. Høyere middelveidi gir nødvendigvis større standardavvik. Slik er det ikke ved normalfordelingen.

Den relative spredning $s/\bar{x} = 1/\sqrt{\bar{x}}$ avtar med økende verdi av \bar{x} .

$$P^x = \frac{\bar{x}^x}{x!} \cdot e^{-\bar{x}}$$

er gitt ved

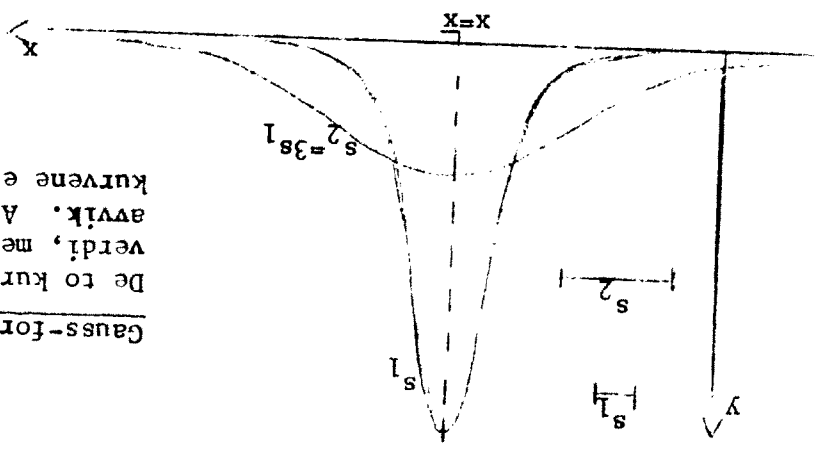
Gjentakelsesmålinger viser en fordeling som kalles Poisson-fordeling, og Som mål for strålingen brukes et antall x elektriske pulser i en tid t . ikke kan være normalfordelt. Dette gjelder bl.a. for radioaktiv stråling. For noen målinger kan det teoretisk vises at gjentakelsesmålinger

Andre fordelingsfunksjoner. Poisson-fordeling

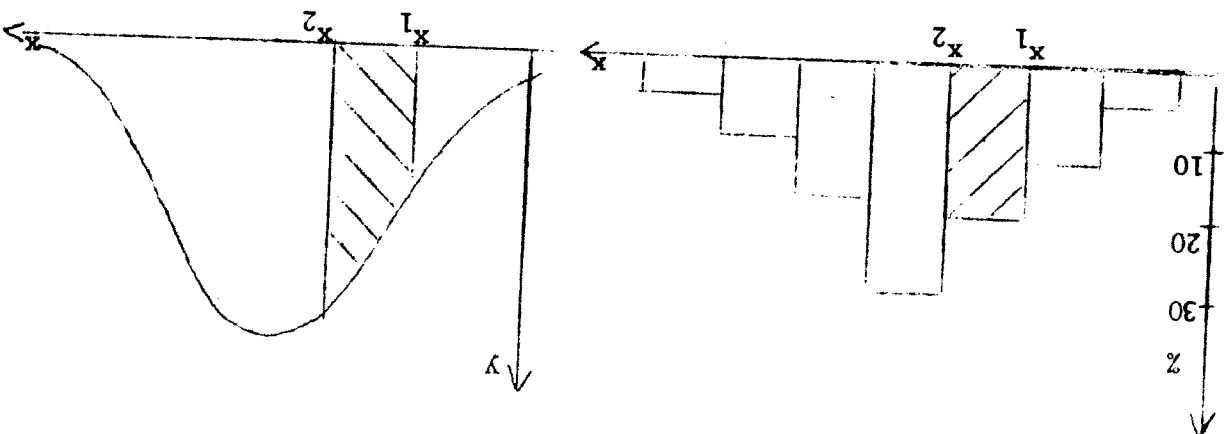
fordelingsfunksjon.

et observasjonsmateriale passer til eller stemmer med en antatt teoretisk I teoretisk statistikk er angitt spesielle regnemessige prøver om det samme som areal av histogrammet.

som histogrammet. Målestokken må være slik at areal under kurven er melen for normalfordelingen, og tegne denne kurven inn i samme aksekors observasjonene i linjediagrammet (histogrammet), sette disse inn i for- den observerte fordeling ved å beregne middelveidi og standardavvik for inntrykk av hvor godt normalfordelingen beskriver (eller "passer til") fordeling. Normalfordelingen angir en mulig fordeling. Man kan få et Linjediagrammet eller histogrammet gir et bilde av den virkelige



Gauss-fordeling (normalfordeling)
 De to kurvene har samme middel- verdi, men forskjellig standard- avvik. Arealene under de to kurvene er like store.



Histogrammet viser hvorledes måleverdiene er fordelt på de forskjellige områder eller klasser. Av figuren ovenfor fremgår f.eks. at 20% av måleverdiene falt i området mellom x_1 og x_2 (søyle nr. 3). På denne måten leses histogrammet som et referat.

Vi kan også lese histogrammet som en prognose. I og med at 20% av observasjonene har gitt verdier i området $x_1 - x_2$, så må vi anta at om

vi gjør en måling til, så er det en sannsynlighet på 20% (0,2) for at denne målingen skal gi en verdi i området for søyle nr. 3. Men vi kan ikke si

noe sikkert om hva resultatet av neste måling vil bli. Ifølge histogrammet er det større sannsynlighet for at målingen skal gi et resultat i

området for søyle nr. 4, men dette er ikke til hinder for at neste måling

kan komme til å gi et resultat innenfor søyle nr. 1.

Alle søylene tilsammen representerer samtlige utførte observasjoner

(100%). Forholdet mellom arealet av søyle nr. 3 og arealet av hele histogrammet gir oss sannsynligheten for at en enkelt måling skal gi et resultat i området $x_1 - x_2$ for søyle nr. 3.

Tilsvarende forhold har vi for en kontinuerlig fordelingsfunksjon.

Arealet under hele kurven representerer det totale antall observasjoner.

Det skraverte arealet mellom verdiene x_1 og x_2 er, som ved histogrammet,

et mål for antall observasjoner eller måleresultater mellom verdiene x_1

og x_2 . Forholdet mellom det skraverte arealet og arealet under hele

kurven gir oss sannsynligheten for at vi ved en måling skal få en måleverdi i

området mellom x_1 og x_2 .

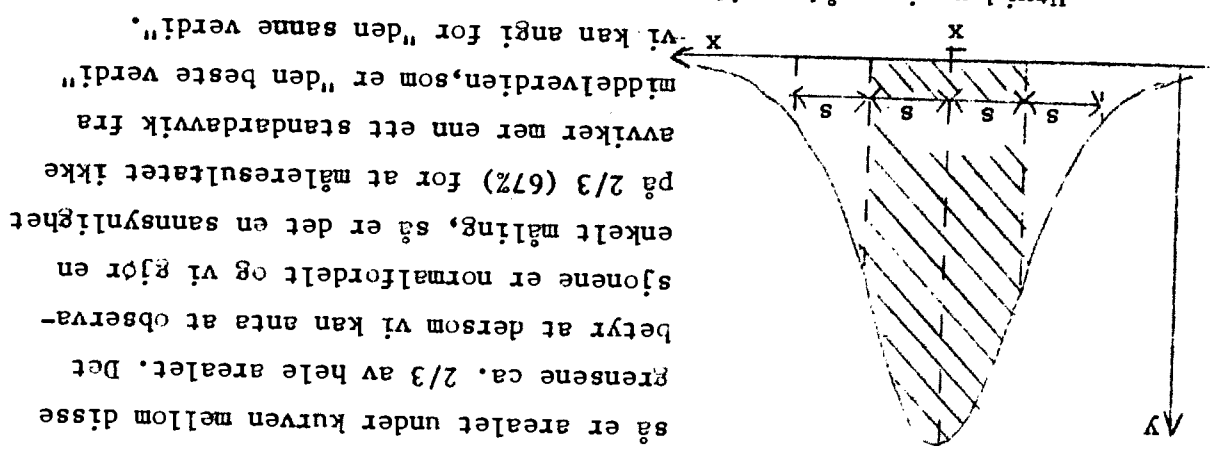
På matematisk form kan vi skrive

$$P_{x_1-x_2} = \frac{\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx}{\int_{x_2}^{+\infty} f(x) dx}$$

hvor $P_{x_1-x_2}$ er sannsynligheten for at en enkelt måling skal gi en verdi i området $x_1 - x_2$.
 Dette gjelder alle fordelingsfunksjoner.

Ser vi spesielt på normalfordelingen og avgrensner et område som

omfatter ett standardavvik til begge sider for middelveien (se fig.),



Utvider vi området til to standardavvik til begge sider for \bar{x} , er arealet mellom disse grensene ca. 96% av hele kurvearealet. Det betyr at det er meget liten sannsynlighet for at en måling skal avvike mer enn to standardavvik fra middelveien. I praksis vil større avvik enn 2 s ikke skyldes statistiske variasjoner, men det som kalles "grove feil" eller "tabber".

Gyldighet av formler. Skjønsmessig angivelse av usikkerhet

En kritikklovs bruk av formlene for standardavvik for enkeltmåling

(s) og for middelvei (\bar{x}) kan føre til helt urimelige konklusjoner med

hensyn til måleusikkerhet. Forutsetningen for å bestemme standardavviket

på statistisk grunnlag etter de angitte formler er først og fremst at man

kan observere flere, helst mange verdier innenfor variasjonsområdet. Hvis

dette ikke er mulig, må usikkerheten angis på annet grunnlag, ofte skjønns-

messig. Ikke sjelden vil avlesningsusikkerheten være dominerende.

Standardavviket er i seg selv en statistisk størrelse med en viss

usikkerhet. Ved få gjentakelsesmålinger, 5-10 målinger, er usikkerheten

i standardavviket 35-25%. I slike tilfeller vil en skjønsmessig vurder-

ing i alminnelighet være like "riktig" som en beregnet verdi av s.

Ved enklere målinger har man svært ofte situasjoner som nevnt

ovenfor, nemlig dominerende avlesningsusikkerhet og/eller få gjentakel-

ser. I alminnelighet vil man da med litt fornuft nok så lett kunne sette

en øvre og en nedre grense for mulig observerte verdier, og dermed ha

Fastlagt grenseavviket. Om måleusikkerheten uttrykt ved standardavviket s kan man da si at $s <$ grenseavviket.

I slike tilfeller bør man være varsom med bruk av likhetstegn. I alminnelighet vil det riktige være å angi " $s < \dots$ " og ikke " $s = \dots$ ", men forholdene kan variere fra tilfelle til tilfelle, slik at det ofte kan være naturlig å angi "anslått usikkerhet $s = \dots$ " e.l. I alle tilfeller bør det fremgå om usikkerheten er anslått skjønsmessig eller om det er beregnet på grunnlag av et større antall gjentakelsesmålinger som er spredt innenfor usikkerhetsområdet.

En skjønsmessig angivelse av måleusikkerheten, slik som antydde i det foregående, kan synes noe tilfældig og løs, men sier allikevel atskillig mer om usikkerheten enn om man ikke sier noe i det hele tatt. Det må da forutsettes at de skjønsmessige vurderinger og angivelser gjøres med en viss omhu og fornuft. Er det f.eks. rimelig grunnlag for å anta at usikkerheten på en lengdemåling er mindre enn 1 mm, så er det temmelig villende om man angir "usikkerheten er anslått til å være mindre enn 1 cm", selv om det siste er aldri så "riktig". En diskusjon om en usikkerhet mindre enn 1 mm også er mindre enn 1 cm er jo nok så uinteressant.

Angivelse av måleresultat. Absolutt og relativ usikkerhet. Antall siffrer

Som måleresultat angis naturlig nok "den beste verdi". Ved likeverdige enkelmålinger er dette middelverdien. Har de forskjelligverdige enkelmålingene forskjellig usikkerhet, tillegges enkelverdiene vektall som er/omvendt proporsjonale med kvadratet av usikkerheten.

Til et fullstendig måleresultat hører også en angivelse av usikkerheten i den angitte måleverdi. Usikkerheten skal derfor alltid angis. Hvordan dette gjøres kan variere fra tilfelle til tilfelle. Det vanligste brukte mål for usikkerhet er standardavviket.

Dersom situasjonen er den at man har en rekke enkelmålinger spredt innenfor usikkerhetsområdet, angis standardavviket beregnet etter formlene i det foregående. Det må klart fremgå om dette standardavviket er uttrykk for spredningen i den tallrekke som middelverdien er beregnet av (s), eller om det er spredning i middelverdien (s^m), dvs. den spredning man kan vente å finne om man gjør mange bestemmelser av middelverdien på samme måte.

Dersom man bare har få gjentakelser, dominerende avlesningsusikkerhet e.l. angis usikkerheten skjønsmessig på den måten at man anslår en øvre grense for et standardavvik. Man sier vanlig da bare at "standardavviket er anslått til å være mindre enn \dots " ($s < \dots$). Uttrykket

"standardavviket er lik ..." (s = ...) bør forbeholdes de tilfeller hvor man har bestemt standardavviket på et rimelig statistisk materiale.

Er måleverdien x og usikkerheten for denne størrelse s_x , så kalles s_x den absolute usikkerhet og forholdet s_x/x for den relative usikkerhet angis gjerne i %. Ofte er den relative usikkerhet et bedre mål for hvor "god" eller nøyaktig en måleverdi er.

Ved angivelse av måleresultater er antall siffer i det tall man angir av vesentlig betydning. Den generelle regel er at man skal angi så

mange siffer at siste siffer er usikkert. Angir man færre siffer, betyr

det at man ikke utnytter den informasjon målingen gir. Angir man flere

siffer, er man inne i et område hvor målingene ikke gir grunnlag for å

velge ett siffer fremfor andre. Det er stor forskjell på å angi 2,0 cm

eller 2,000 cm som resultatet av en måling. Angis 2,0 angir man samtidig

at usikkerheten ligger i første desimal, altså er av størrelse mm, mens

2,000 viser at usikkerheten ligger i tredje desimal, og er av størrelse

tusendels cm.

Det er antall siffer og ikke desimaler som er avgjørende. Om de

to resultatene skal angis i mm, må de skrives 20 mm og 20,00 mm eller

f.eks. i meter som 0,020 m (eller $20 \cdot 10^{-3}$ m) og 0,0200 m (eller $20,00 \cdot 10^{-3}$ m)

Man kan ikke helt "lure seg unna" usikkerhetsvurderinger bare

ved å la være å nevne usikkerhet. For "innviede" sier man noe om usikker-

heten gjennom det antall siffer man angir resultatet med. Man blir i alle

fall tolket slik.

Eksempel. Tiden for et bestemt fenomen er målt 70 ganger. Resultatene er angitt

ordnet i de to første kolonner i nedenstående tabell.

Foreløpig middelværdi $M = 150$

Obs.verdier angitt i 10^{-2} s Antall obser- vasjoner	x	f	$x-M$	$f(x-M)$	$f(x-M)^2$	Abs. og rel. antall obs. i klassen	Abs. og rel. ant. i klasser.
143	1	-7	-7	49	2		
144	1	-6	-6	36			
145	2	-5	-10	50		4 - 5,5 %	
146	3	-4	-12	48			
147	4	-3	-12	36			
148	5	-2	-10	20			
149	6	-1	-6	6			
150	6	0	0	0			
151	7	+1	+7	7			
152	8	+2	+16	32			
153	7	+3	+21	63			
154	6	+4	+24	96			
155	5	+5	+25	125			
156	3	+6	+18	108			
157	3	+7	+21	147			
158	2	+8	+16	128			
159	0	+9	0	0			
160	1	+10	+10	100			
SUM:	70		95	1051			
						3-4%	70-100%
						11-16%	67-96%
						21-30%	56-80%
						19-27%	35-50%
						12-17%	16-23%

Kolonne 3 i skjemaet gir verdiene for $(x-M)$, som bortsett fra ett tall er ensifrede tall. Vi har bruk for $f \cdot (x-M)$ som vi får ved parvis multiplikasjon av tallene i kolonne 2 og 3. Resultatene er gitt i kolonne 4. Videre

$$\bar{x} = M + \frac{\sum f \cdot (x-M)}{N} \quad , \quad s \approx \sqrt{\frac{\sum f \cdot (x-M)^2}{N} - \frac{(\sum f \cdot (x-M))^2}{N^2}}$$

Tallregninger med mange tall med mange siffer kan bli svært tidkrevende. Mye arbeid kan ofte spares ved fornuftig framsangsmåte og ordning. Hvorledes dette best kan gjøres avhenger bl.a. av hva slags hjelpemidler man har. I tabellen er vist et eksempel på hvorledes beregning av middelværdi og standardavvik kan forenkles ved å velge en foreløpig middelværdi M omtrent midt i variasjonsområdet. \bar{x} og s kan da beregnes av formelene

I det følgende vil vi beregne middelværdien (\bar{x}), standardavviket på enkeltmålingene (s) og standardavviket på middelværdien (s^m) for de utførte målingene. Vi vil framstille fordelingen ved et linjediagram, et histogram og en kumulativ fordelingskurve. Videre vil vi beregne og tegne den normale fordeling som svarer til de beregnede verdier av \bar{x} og s , og sammenlikne denne kurven med histogrammet.

Selv om vi på denne måten har fått angitt måleresultatet som ett tall så er det klart at det heter en viss usikkerhet ved tallet. Vi kan ikke kategorisk si at "dette er den sanne verdi", men må nøye oss med å si at "dette er den beste verdi vi kan gi på grunnlag av målingene". Den usikkerhet som heter ved tallet angis vanlig ved standardavviket, enten på enkeltmålingene eller på middelværdien.

den aritmetiske middelværdi som "den beste verdi" eller fikseringsverdi. Siden vi her ikke har noen grunn til å stole mer på noen målinger i forhold til de andre (målingene er likeverdige og uavhengige), så angir vi at "den sanne verdi" ligger nær disse verdier og ikke nær en av ytterverdi-ene. Noen verdier som er observert hyppigere enn andre. Det er derfor sannsynlig at "den sanne verdi" ligger nær disse verdier og ikke nær en av ytterverdi-ene. Siden vi her ikke har noen grunn til å stole mer på noen målinger i forhold til de andre (målingene er likeverdige og uavhengige), så angir vi den aritmetiske middelværdi som "den beste verdi" eller fikseringsverdi.

Vi ser at selv om vi ikke kan framheve en bestemt måling, så er det observert verdier som er observert hyppigere enn andre. Det er derfor sannsynlig at en av verdiene er riktig og alle de andre gale. Hva skal vi da gjøre? betingelser. Vi kan derfor ikke på grunnlag av målingene si at en av de Hver av de 70 gangene er målingen utført på samme måte og under samme værtilstand. Innenfor dette området på 0,17 s er observert i alt 17 forskjellige verdier med forskjellig hyppighet.

Vi ser at variasjonsområdet eller usikkerhetsområdet strekker seg fra $143 \cdot 10^{-2}$ s til $160 \cdot 10^{-2}$ s. Innenfor dette området på 0,17 s er obser-

har vi bruk for $f \cdot (x-M)^2$ som vi får ved parvis multiplikasjon av rællene i kolonne 3 og 4. Resultatet er angitt i kolonne 5. For beregning av \bar{x} har vi bruk for summene av kolonne 2 (som gir oss $N = 70$), kolonne 4 (som gir $\sum f(x-M) = 95$ og av kolonne 5 (som gir $\sum f(x-M)^2 = 1051$). Innsatt gir dette:

$$\bar{x} = (150 + \frac{95}{70}) \cdot 10^{-2} s = 151,4 \cdot 10^{-2} s$$

$$s = \sqrt{\frac{1051}{70} - \frac{(151,4 - 150)^2}{70}} \cdot 10^{-2} s = 3,6 \cdot 10^{-2} s \text{ (som med ett siffer avrundes til } 4 \cdot 10^{-2} s)$$

Tidligere er nevnt at ved normalfordelte observasjoner kan vi i praksis vente at standardavviket vil være ca. $1/4$ av variasjonsområdet når vi har mange observasjoner, og at standardavviket kan anslås på dette grunnlag. I vårt tilfelle får vi da for anslått standardavvik $s' \approx 1/4(160-143) \approx 4$, som stemmer bra med den beregnede verdi for s . Vi har:

Absolutt usikkerhet i enkeltmålingene: $s \approx 4 \cdot 10^{-2} s$

Relativ usikkerhet $\frac{s}{\bar{x}} \approx \frac{3,6}{150} \approx 0,025$

som avrundes til 0,03 (3%)

Usikkerhet på middelverdien:

$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{3,6 \cdot 10^{-2} s}{\sqrt{70}} \approx 0,4 \cdot 10^{-2} s$$

$$\frac{s}{\bar{x}} = \frac{0,4}{150} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ (0,3\%)}$$

Etter dette er det rimelig å angi \bar{x} med 4 siffer slik at resultatet av målingen angis som

$$\bar{x} = 151,4 \cdot 10^{-2} s \quad s_m = 0,4 \cdot 10^{-2} s$$

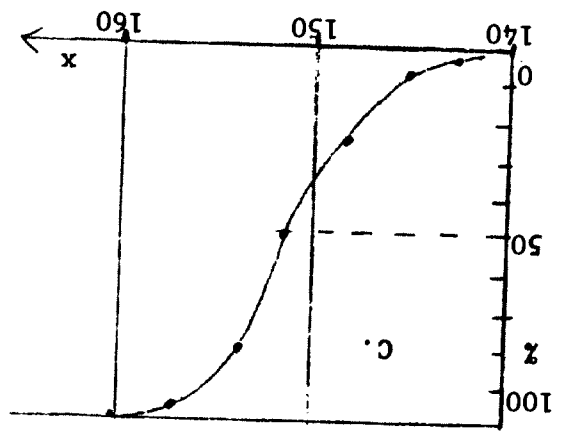
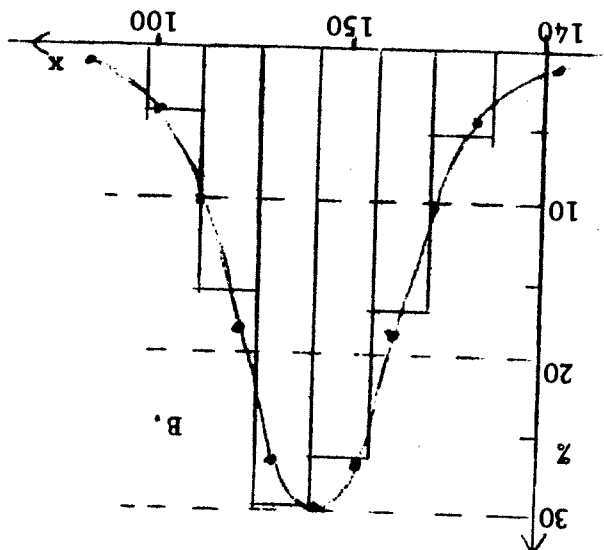
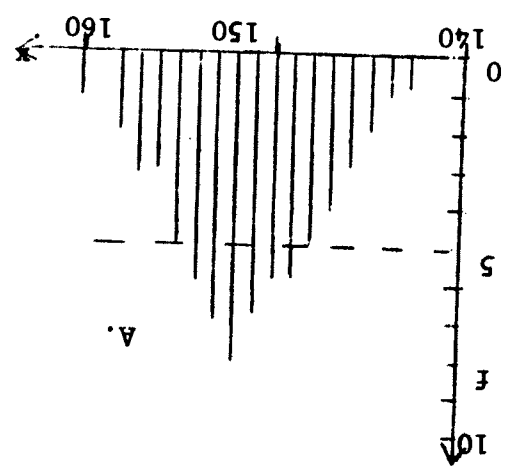
Man bruker også skrivemåten

$$x = (151,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-2} s$$

Linjediagram som viser fordelingen kan tegnes på grunnlag av kolonne-
 1 og 2. De to siste kolonnene i skjemaet gir grunnlag for å tegne histo-
 gram og kumulativ fordeling. Klasseindelingen er valgt slik at hver
 klasse omfatter 3 forskjellige verdier (klassebredde 3), og klassegrensene
 er valgt mellom verdiene 142/143, 145/146 osv. Vi ser at verdiene i den
 første klassen (143, 144, 145) er observert 4 ganger, som utgjør 5,5% av
 det totale antall observasjoner. Verdiene i neste klasse er observert
 12 ganger, som svarer til 17%. I siste kolonne er her angitt at verdiene
 i de to første klassene tilsammen har vært observert 16 ganger, som er
 23% av det totale antall.

I linjediagrammet nedenfor er som ordinat avsatt det absolute
 antall observasjoner, i de to andre diagrammer er angitt det relative
 antall i %.

Sammen med histogrammet er tegnet den normalfordelingskurven som
 svarer til $\bar{x} = 151,4$ og $s = 4$. De beregnede punktene er avmerket. For
 at arealet av histogrammet skal være likt arealet under kurven, må funk-
 sjonsverdien for normalfordelingen slik formelen er gitt, multipliseres
 med $100 a = 300$ (hvor a er klassebredden).



A: Linjediagram
 B: Histogram og normalfordeling
 C: Kumulativ fordeling.
 (Utjevnet kurve)

Usikkerhetsbidrag fra de enkelte målinger

Ved noen målinger får vi resultatet direkte av observasjonene, slik som f.eks. ved måling av en lengde med målestav eller en tid med et stoppeur. Slike målinger kalles direkte målinger. Det er da enkelt å beregne eller anslå usikkerheten.

Mange målinger, vel de fleste, er ikke så enkle. Oftest må en eller flere direkte observerte verdier settes inn i en formel og resultatet får vi først etter mer eller mindre omfattende regninger. Slike målinger kalles sammensatte målinger eller indirekte målinger.

I det foregående kapittel om gjentakelsesmålinger er det ikke gjort noen forutsetninger om direkte eller sammensatte målinger. Det er bare forutsatt at alle gjentakelsesmålingene er utført på samme måte, er likeverdige. Vi kan derfor godt bestemme spredning og usikkerhet for sammensatte målinger slik som angitt tidligere. Men hvis hver måling krever mye regning, blir dette svært arbeidskrevende sammenliknet med bestemmelsen av usikkerheten på direkte målinger. I praksis viser det seg meget enklere å bestemme usikkerheten i de direkte målingene som inngår, og av disse beregne usikkerheten i det endelige resultat. For praktisk arbeid har denne fremgangsmåte to vesentlige fordeler. For det første kan vi da se hvilken betydning usikkerheten i de enkelte direkte målingene har innbyrdes, om f.eks. en bestemt måling bidrar meget eller lite til usikkerheten i resultatet, og for det annet kan alle tallregninger etter denne metoden utføres med enkle tall med 1-2 siffrer, slik at selve regnearbeidet blir vesentlig lettere og raskere.

Usikkerheten i det endelige resultatet skrives fra usikkerhetene i de forskjellige målingene som inngår. Usikkerheten i hver av direkte-

målingene gir et visst bidrag som kalles usikkerhetsbidraget fra vedkom-

mende måling. Usikkerhetsbidraget fra en måling sier hvor meget resulta-

tet varierer dersom den målte størrelsen varierer med en verdi som svarer

til usikkerheten i den observerte verdi. Hvor stort usikkerhetsbidraget

fra en bestemt måling blir, avhenger selvfølgelig av hvor stor usikker-

heten på målingen selv er, men avhenger også av andre ting som f.eks. hva

slags formel vi har, hvilke verdier de andre størrelsene i formelen har

osv.

For å beregne usikkerhetsbidragene fra de forskjellige direkte målin-
gene betrakter vi resultatet som en funksjon av de målte størrelsene.

La oss først se på en funksjon av en variabel, $y=f(x)$. Til verdien $x=x_1$ svarer funksjonsverdien $y_1=f(x_1)$.

Får x_1 et tillegg Δx , får funksjonsverdien $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$ og et til-

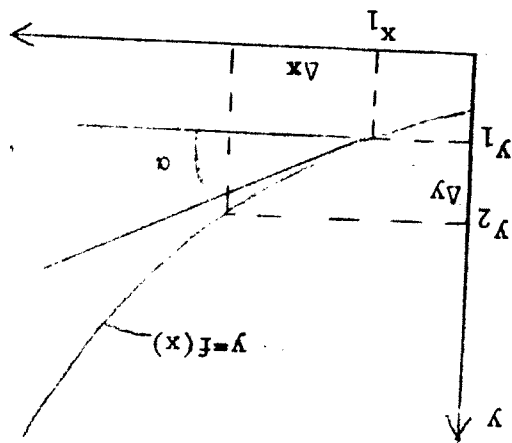
legg $\Delta y = y_2 - y_1$. Ellers sagt på en annen måte: Dersom x_1 varierer med

en størrelse Δx , så varierer y_1 med en størrelse Δy . Hvis nå x_1 er

en direkte målt størrelse og Δx er usikkerheten i denne størrelsen, mens

y_1 er det beregnede måleresultatet, så er Δy usikkerhetsbidraget fra

målingen av x_1 .



I praksis bruker vi en tilnærmet beregning av usikkerhetsbidraget.

Vi trekker tangenten til kurven $y=f(x)$ i punktet (x_1, y_1) . Dersom Δx er liten, slik det i allmønelighet er ved måleusikkerhet, ser vi at vi tilnærmet kan sette $\Delta y = (\text{tga}) \cdot \Delta x = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} \cdot \Delta x$. (Sagt på en annen måte betyr

dette at vi tar med bare første ledd i en Taylor-rekke). I målepraksis er det vanlig å angi usikkerhetsbidraget med en slik tilnærmet verdi.

Eksempel: Arealen S av en sirkel er bestemt ved å måle diameteren a . Arealen beregnes av formelen $A = \pi a^2 / 4$. Her svarer S til y og a til x i det generelle uttrykket ovenfor. Målingen ga som resultat $a = 10,0$ cm (svarer til x_1) med usikkerhet $s_a = 0,1$ cm (svarer til Δx). Til $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ svarer $\left(\frac{dS}{da}\right)_{a=10} = \pi a / 2$. Usikkerhetsbidraget fra diametermålingen er $\left(\frac{dS}{da}\right)_{a=10} \cdot s_a$.

Ved innsetning av måleverdiene får vi at usikkerhetsbidraget blir $(\pi \cdot 10,0 / 2) \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} = 0,5 \pi \text{ cm}^2 \approx 1,5 \text{ cm}^2$. En usikkerhet på 1 mm i diametermålingen gir altså her et usikkerhetsbidrag på ca. $1,5 \text{ cm}^2$ i arealbestemmelsen. Siden vi her bare har en målt størrelse og ingen

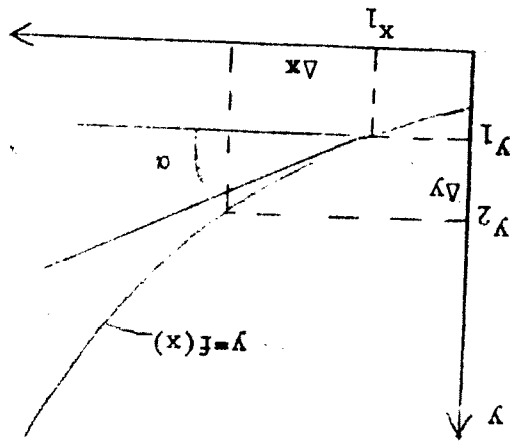
andre "bidragsyttere", er dette usikkerhetsbidraget også lik usikkerheten i sirkelarealet bestemt på denne måten.

Har vi flere direkte målte størrelser som inngår i formelen, blir resultatet en funksjon av flere variable. Vi beregner da usikkerhetsbidraget fra hver måling på helt tilsvarende måte som angitt for en variabel, idet vi ved beregningen av bidraget fra en bestemt måling

i sirkelarealet bestemt på denne måten.

La oss først se på en funksjon av en variabel, $y=f(x)$. Til verdien $x=x_1$ svarer funksjonsverdien $y_1=f(x_1)$.

Får x_1 et tillegg Δx , får funksjonen verdien $y_2 = f(x_1 + \Delta x)$ og et tillegg $\Delta y = y_2 - y_1$. Ellers sagt på en annen måte: Dersom x_1 varierer med en størrelse Δx , så varierer y_1 med en størrelse Δy . Hvis nå x_1 er en direkte målt størrelse og Δx er usikkerheten i denne størrelsen, mens y_1 er det beregnede måleresultatet, så er Δy usikkerhetsbidraget fra målingen av x_1 .



I praksis bruker vi en tilnærmet beregning av usikkerhetsbidraget. Vi trekker tangenten til kurven $y=f(x)$ i punktet (x_1, y_1) . Dersom Δx er liten, slik det i allmønelighet er ved måleusikkerhet, ser vi at vi tilnærmet kan sette $\Delta y = (\text{tga}) \cdot \Delta x = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} \cdot \Delta x$. (Sagt på en annen måte betyr dette at vi tar med bare første ledd i en Taylor-rekke). I målepraksis er det vanlig å angi usikkerhetsbidraget med en slik tilnærmet verdi.

Eksempel: Arealen S av en sirkel er bestemt ved å måle diameteren a .

Arealen beregnes av formelen $A = \pi a^2 / 4$. Her svarer S til y og a til x i det generelle uttrykket ovenfor. Målingen ga som resultat $a = 10,0$ cm (svarer til x_1) med usikkerhet $s_a = 0,1$ cm (svarer til Δx). Til $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ svarer $\left(\frac{dS}{da}\right)_{a=10,0} = \pi a / 2$. Usikkerhetsbidraget fra diametermålingen er $\left(\frac{dS}{da}\right)_{a=10,0} \cdot s_a$.

Ved innsetning av måleverdiene får vi at usikkerhetsbidraget blir $(\pi \cdot 10,0 / 2) \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} = 0,5 \pi \text{ cm}^2 \approx 1,5 \text{ cm}^2$. En usikkerhet på 1 mm i diametermålingen gir altså her et usikkerhetsbidrag på ca. $1,5 \text{ cm}^2$ i arealbestemmelsen. Siden vi her bare har en målt størrelse og ingen andre "bidragsyttere", er dette usikkerhetsbidraget også lik usikkerheten i sirkelarealet bestemt på denne måten.

Har vi flere direkte målte størrelser som inngår i formelen, blir resultatet en funksjon av flere variable. Vi beregner da usikkerhetsbidraget fra hver måling på helt tilsvarende måte som angitt for en variabel, idet vi ved beregningen av bidraget fra en bestemt måling

tenker oss alle de andre målte størrelser som konstanter under derivasjonen. Vi kaller dette partiell derivasjon og markerer det ved egne derivasjons tegn, $\frac{\partial}{\partial x}$ osv.

Vi kaller resultatet eller funksjonsverdien for R. De direkte målte størrelser som inngår i formelen kaller vi generelt for x, y, z, osv. og de tilhørende usikkerhetene for s_x, s_y, s_z , osv. Resultatet R får vi da ved å sette de målte størrelsene x, y, z, osv. inn i en formel eller funksjon $R(x, y, z, \dots)$ slik at vi har $R=R(x, y, z, \dots)$. Usikkerhetsbidraget fra målingen av størrelsen x er da $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) s_x$, usikkerhetsbidraget fra målingen av størrelsen y er $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) s_y$, osv. Det er en forutsetning at de forskjellige størrelsene som inngår er inbyrdes uavhengige.

Eksempel: Areal A av et rektangel er bestemt ved å måle lengden λ og bredden b. Arealet beregnes av formelen $A=\lambda \cdot b$. Her svarer A til R i den generelle fremstillingen ovenfor. Vi har to målte størrelser, og vi kan si at λ svarer til x i det generelle uttrykket og b svarer til y. Usikkerheten i målingen av λ og b er henholdsvis s_λ og s_b .

$\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right)$ svarer nå til $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ og $\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$ svarer til $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$. Ved derivasjoner $\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right)$ skal vi betrakte alle størrelser utenom λ som konstanter. Vi får da $\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right) = b$. På tilsvarende måte får vi $\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) = \lambda$. Usikkerhetsbidraget fra målingen av lengden λ er da $\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right) \cdot s_\lambda = b \cdot s_\lambda$ og fra måling av bredden er usikkerhetsbidraget $\lambda \cdot s_b$. Målingene ga som resultat $\lambda = 100,0$ cm og $b = 10,0$ cm. Usikkerhetene er henholdsvis $s_\lambda = 0,1$ cm og $s_b = 0,1$ cm. Begge størrelsene er altså målt med en usikkerhet på 1 mm. Ved innsetning får vi da at usikkerhetsbidraget fra måling av lengden λ er $(10,0 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm}) = 1,0 \text{ cm}^2$ mens usikkerhetsbidraget fra måling av bredden b er $(100,0 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm}) = 10,0 \text{ cm}^2$.

Slik målingene er utført gir altså målingen av bredden et bidrag til usikkerheten i resultatet som er 10 ganger større enn det bidrag måling av lengden λ gir. I dette tilfelle er jo dette lett å gjennomskue, fordi en "usikkerhets-stripe" på 1 mm langs den lengste sidekanten vil ha et 10 ganger så stort areal som en like bred stripe langs den korteste sidekanten. I de fleste tilfeller er ikke forholdene så gjennomskjellige, og da gir uttrykkene for de enkelte usikkerhetsbidragene nyttige opplysninger.

I vårt eksempel med rektangel kan vi si at dersom usikkerhetsbidraget fra bredde målingen ikke skal være større enn fra den utførte lengdemålingen, så må vi måle bredden med en usikkerhet som ikke er mer enn 0.1 mm. En annen konklusjon kan være at dersom vi ønsker å bestemme arealet A med større nøyaktighet, så må vi i første omgang konsentrere oss om å måle bredden nøyaktigere (med mindre usikkerhet). Det er lite eller intet å vinne ved å måle lengden nøyaktigere hvis vi måler bredden på samme måten som før.

Usikkerhet på en sammensatt måling. Summasjon av usikkerhetsbidrag

Måleusikkerheten skyldes tilfeldige (statistiske) avvik. Som måle- verdi velger vi "den beste" verdi, men vi kan ikke si noe sikkert om denne er litt større eller mindre enn "den sanne" verdi, eller hvor meget "den beste" verdi avviker fra "den sanne". Når et måleresultat er avhengig av flere målte størrelser, er det derfor en viss sannsynlighet for at om vi for en av størrelsene regner med en verdi som gjør resultatet litt for stort, så regner vi for en av de andre størrelsene med en verdi som trekker i motsatt retning. En numerisk summasjon av de forskjellige usikkerhetsbidragene vil derfor gi et dårlig mål for usikkerheten i resultatet. En slik summasjon vil svare til at de tallene vi regner med er slik at de hver for seg gir et avvik fra "sann verdi" for resultatet som svarer til usikkerhetsbidraget, og at de allesammen trekker i samme retning. En slik kombinasjon av tilfeldige avvik er lite sannsynlig, og mindre sannsynlig jo flere størrelser som inngår i målingen. Vi må derfor summere usikkerhetsbidragene på en annen måte som kan gi et bedre mål for usikkerheten i resultatet.

*

Det kan vises at dersom en størrelse R er avhengig av flere andre størrelser x, y, z, ... slik at $R=R(x, y, z, \dots)$, og hver av størrelsene x, y, z, ... er normalfordelt med standardavvik henholdsvis s_x, s_y, s_z, \dots , så er også R normalfordelt med et standardavvik s_R som i første tilnærming kan skrives

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 \cdot s_y^2 + \dots}$$

(a)

Vi ser at vi under rottegnet har kvadratsummen av usikkerhetsbidragene. Det er i målepraksis vanlig å summere usikkerhetsbidragene på denne måten og bruke s_R som mål for usikkerheten på resultatet R. Det at vi under rottegnet skal summere kvadratene av usikkerhetsbidragene, vil si at store bidrag betyr relativt mer enn om vi bare

* Se appendix.

Sammen med formelen for standardavviket utgjør usikkerhetsformlene bidragene til den relative usikkerhet.

Forutsetningen er at alle målte størrelser x, y, z, \dots er

ling. I (a) har vi bidragene til den absolute usikkerhet, i (b) og (c) kalles usikkerhetsbidraget (eller partialusikkerheten) for vedkommende må- bare for logaritmiske uttrykk. Størrelsen i hver parentes under rottegnet lingers som inngår. Formlene (a) og (b) gjelder generelt, formel (c) sammensatt måling settes sammen av usikkerhetene i de forskjellige må- kalle "usikkerhetsformlene". De viser alle hvorledes usikkerheten i en De tre formlene (a), (b) og (c) vil vi her for enkelthets skyld

istedenfor å bruke formelen for s_R direkte.

tuel senere beregne den absolute usikkerheten s_R på dette grunnlag, det seg derfor alltid først å beregne den relative usikkerheten, og even- fordi vi slipper å derivere. Når vi har en logaritmisk formel, lønner heter i direktmålingene. Formelen er også meget lettvin i praksis, heng mellom den relative usikkerhet i resultatet og de relative usikker- Formelen viser at vi i slike tilfeller har en meget enkel sammen-

$$\frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 + \dots}$$

(c)

uttrykk, får vi (se appendix):

Anvendes formelen for den relative usikkerhet på et slikt logaritmisk formel har man ofte i praksis. De kalles gjerne logaritmiske uttrykk. omfatter multiplikasjoner, divisjoner og rotutdragninger. Den slags som helst positive eller negative tall. Det vil si at regningene bare stant, x, y, z, \dots er observerte størrelser og n, m, p, \dots kan være hvilke $R = R(x, y, z, \dots)$ er av formen $R = A \cdot x^n \cdot y^m \cdot z^p \cdot \dots$ hvor A er en kon- Dette uttrykket blir spesielt enkelt dersom funksjonen (formelen)

$$\frac{s_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 + \dots}$$

(b)

For den relative usikkerheten i resultatet kan vi skrive

het som er proporsjonal med antallet.

roten av antallet, mens vi ved en direkte summering ville få en usikker- usikkerhetsbidrag, så vokser usikkerheten i resultatet bare med kvadrat- summerte de enkelte bidrag. Vi ser også at dersom vi har flere like

inbyrdes uavhengige. Dette er viktig å passe på i praksis, spesielt hvis man innfører nye variable i en formel.

Regnenøyaktighet. Overslagsregninger. Antall siffrer.

Ved tallregninger med usikkerhetsformlene kan man, og skal man, regne med avrundede enkelte tall. Grunnlaget for dette er at i de enkelte usikkerhetsbidrag inngår usikkerhetene på de enkelte målingene $s_x, s_y, \dots osv.$ Disse tall er i seg selv usikre, ofte bare anslått skjønnsmessig. Både usikkerhetsbidragene og den samlede usikkerhet avrundes derfor til enkelte tall med ett eller høyst to gjeldende siffrer. Nøyaktige tallregninger med mange siffrer må tolkes enten som at man ikke har greie på hva man stiller med, eller at man prøver å bløffe, eller at målingene er basert på et meget omfattende statistisk materiale.

Fordi vi bare har grunnlag for regning med ett eller to siffrer kan vi ofte se bort fra små usikkerhetsbidrag i kvadratsummen under rottegnet. I praksis bruker man den regel at dersom et av kvadratleddene er mindre enn $1/10$ av et av de andre leddene, så ser vi bort fra det minste leddet, fordi dette allikevel bidrar uvesentlig til usikkerheten. Et

f.eks. ett av kvadratleddene 10 og et annet 1 , så får vi med begge ledd $\sqrt{11}$. I forbindelse med usikkerhetsregning på slikt grunnlag vi her antar, er det ingen forskjell på $\sqrt{11}$ og $\sqrt{10}$. Begge settes tilnærmet lik 3 .

Ved tallregninger med formlene (b) og (c) for den relative usikkerheten lønner det seg i allmennelighet å skrive hver av parentesene under rottegnet på formen $a \cdot 10^{-2}$, f.eks. $(n \cdot s_x/x) = a_1 \cdot 10^{-2}$, $(m \cdot s_y/y) = a_2 \cdot 10^{-2}$ osv., slik at vi får

$$s_R/R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots} \cdot 10^{-2}$$

hvor vi for $a_1, a_2 \dots$ velger enkle ensifrede eller tosfiredede tall. På denne formen er det enkelt å vurdere de enkelte bidrag inbyrdes. Kvadratrotten gir direkte usikkerheten i %.

Ved beregning av resultatet R setter man "de beste" verdiene

$\underline{x}, \underline{y}, \dots$ inn i formelen $R = R(\underline{x}, \underline{y}, \dots)$. Regnenøyaktigheten må her

rette seg etter den usikkerhet man har. Som en generell regel gjelder

fremdeles at resultatene angis med så mange siffrer at siste siffrer er

usikkert. Vi må da utføre tallregningene så nøyaktig at vi ikke innfører

ny usikkerhet i resultatet, men heller ikke så nøyaktig at man kaster bort

tid og arbeid på å beregne siffer som allikevel må sløyfes. Regner vi med for få siffer, ødelegger vi noe av den informasjonen som målingene kan gi. Regner vi med for mange siffer, kan det bety at vi bruker unøddig tid på regningene, og hvis vi da også angir resultatet med for mange siffer, gir vi inntrykk av at målingene gir mer informasjon enn det egentlig er grunnlag for.

Som en generell veiledning kan vi si at med usikkerhet på noen få prosent har vi grunnlag for å gi resultatet med 3 siffer. Selve regningene bør da utføres med 4 siffer. Det kan man klare med en 4-sifret logaritmetabell eller med en regnestav på 25-30 cm. Er usikkerheten av størrelsesorden promille, angis resultatet med 4 siffer, og regningene bør utføres med 5 siffer. Da er 4-sifrede logaritmer eller vanlig regnestav ikke tilstrekkelig.

I denne sammenheng må man passe på antall siffer i de konstanter som inngår i formelen. For konstanten π brukes nesten reflektorsk verdien 3,14. For beregning av målinger med usikkerhet på noen få promille er dette ikke tilstrekkelig. Regning med $\pi = 3,14$ vil da "ødeløse" målingen. Man må da regne med $\pi = 3,1416$. Har man på den annen side målinger med usikkerhet på 10-20%, kan man godt regne med $\pi = 3,1$ om det er enklere. Ved bruk av digitale regnemaskiner (lommekalkulatorer) er det ofte lite å spare i arbeid ved avrundinger underveis. Man må da bare passe på at man ikke har med for få siffer i konstantene og så må resultatet avrundes til et antall siffer som er i overensstemmelse med måleusikkerheten.

Eksempler på usikkerhetsregning

Ved begge de foregående eksempler, bestemmelse av et sirkelareal $S = \pi r^2/4$ og areal av et rektangel $A = l \cdot b$ har vi logaritmiske formler. Vi kan derfor beregne de relative usikkerhetene uten derivasjon.

Eksempel 1.

For sirkelen har vi en målt størrelse, diameteren a . Den svarer til x i det generelle uttrykket, og med eksponenten $n = 2$. Konstanten A er her $\pi/4$. Måleverdiene er $a = 10,0$ cm og $s_a = 0,1$ cm. Den relative usikkerhet i a er $s_a/a = (0,1 \text{ cm})/(10 \text{ cm}) = 1 \cdot 10^{-2}$ eller 1%. Da vi bare har en målt størrelse, blir den relative usikkerhet i areal $s_S/S = 2 \cdot (1 \cdot 10^{-2}) = 2 \cdot 10^{-2}$ eller 2%. En usikkerhet på 1% i diameteren gir en usikkerhet på 2% i arealet fordi ved potensering av en måle verdi øker den relative usikkerhet med en faktor som svarer til eksponenten.

Det kan her se fristende ut å innføre $(a + b) = c$ i nevneren, slik at vi får et logaritmisk uttrykk og kan bruke usikkerhetsformelen (c) og slippe derivasjon. Det kan vi ikke gjøre, fordi størrelsen c ikke er uavhengig av størrelsene a og b. Vi må derfor bruke usikkerhetsformlene

Måleresultater:
 $a = 21,6 \text{ cm}$ med usikkerhet $s_a = 0,1 \text{ cm}$
 $b = 28,4 \text{ cm}$ " " $s_b = 0,3 \text{ cm}$

$$f = \frac{a \cdot b}{a + b}$$

og den tilhørende bildeavstand b og innsetting i formelen Brennvidda f for en linse kan bestemmes ved å måle en objektavstand a

Eksempel 3.

La oss se på et eksempel som ikke er fullt så gjennomskikkelig.

Innsetting i formel gir $A = 1000 \text{ cm}^2$ og $s_A = 1000(1 \cdot 10^{-2}) \text{ cm}^2$, slik at resultatet kan angis $A = (1000 \pm 10) \text{ cm}^2$.

bredden måles på samme måte som tidligere.

Det er lite eller intet å vinne ved å måle lengden nøyaktigere dersom arealet med mindre usikkerhet, må vi konsentrere oss om måling av bredden. Vi kan også trekke den konklusjon at dersom vi ønsker å bestemme

bredden b.

målte rektangelareal er her helt dominert av usikkerheten i målingen av rottegnet som bare utgjør 1/100 av det andre leddet. Usikkerheten i det (1%). Vi har etter vanlige regler sett bort fra det første leddet under tive usikkerhet i arealet A får vi $s_A/A = \sqrt{0,1^2 + 1^2} \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-2}$ bredden b er $s_b/b = 0,1 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2}$ (eller 1%). For den relative usikkerhet i $s_b/b = 0,1 \text{ cm}$. Den relative usikkerhet i lengden l er $s_l/l = 0,1 \text{ cm}/100 \text{ cm} = 0,1 \cdot 10^{-2}$ (eller 0,1%). Den relative usikkerhet i

Måleverdiene var $l = 100,0 \text{ cm}$ og $b = 10,0 \text{ cm}$ og med usikkerheter

l svarer til x og b til y. Eksponentene n og m er begge lik 1. Ved rektangelet $A = l \cdot b$ har vi to målte verdier, hvor vi kan si at

Eksempel 2.

Innsetting av måleverdien i formelen for S gir $S = 78,5 \text{ cm}^2$. Den absolute usikkerheten er $s_S = 78,5 \cdot (2 \cdot 10^{-2}) \text{ cm}^2 \approx 1,6 \text{ cm}^2$. Resultatet kan rimelig angis som $(78,5 \pm 1,5) \text{ cm}^2$ eller avrundes $S = (79 \pm 1,5) \text{ cm}^2$

(a) eller (b) og utføre derivasjonene. Ved derivasjon med hensyn på a betraktes b som en konstant. Vi får da

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{(a+b) \cdot b - ab}{b^2} = \frac{(a+b)}{b^2}$$

Tilsvarende får vi ved derivasjon med hensyn på b: $\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{a}{(a+b)^2}$

Vi vil først beregne den absolute usikkerheten s_f etter usikkerhetsformel (a).

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot s_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot s_b^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{b^2}\right)^2 \cdot s_a^2 + \left(\frac{a}{(a+b)^2}\right)^2 \cdot s_b^2}$$

som kan skrives:

$$s_f = \frac{1}{(a+b)^2} \sqrt{(b^2 \cdot s_a^2 + a^2 \cdot s_b^2)}$$

Som avrundede tallverdier for a og b bruker vi a ≈ 20 cm og b ≈ 30 cm

$$s_f = \frac{1}{50^2} \sqrt{(30^2 \cdot 0,1^2 + (20^2 \cdot 0,3)^2)} = \frac{1}{52} \sqrt{0,9^2 + 1,2^2} \approx 0,06 \text{ cm.}$$

Vi ser at i motsetning til det vi hadde ved rektangellet i eksempellet foran, er her de to usikkerhetsbidragene omtrent like store, slik at begge må tas med ved tallregningen.

Innsetting av måleverdiene for a og b i formelen gir $f = 12,25$ cm

Resultatet kan rimelig angis som $f = (12,25 \text{ cm} \pm 0,06 \text{ cm})$

Den relative usikkerhet er $s_f/f = 0,06/12 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ eller 0,5%

La oss beregne den relative usikkerhet etter usikkerhetsformel (b).

Vi må da beregne $\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)$ og $\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)$. Vi får da:

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{ab}{(a+b)} = \frac{ab}{a(a+b)} \quad \text{og} \quad \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{b}{a(a+b)}$$

Innsatt i formel (b):

$$s_f/f = \frac{1}{a+b} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot s_a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot s_b^2}$$

Innsetting av tallverdi gir da:

$$s_f/f = \frac{1}{50} \sqrt{\left(\frac{30}{20} \cdot 0,1\right)^2 + \left(\frac{30}{20} \cdot 0,3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{50} \sqrt{15^2 + 20^2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{50} \sqrt{625} \cdot 10^{-2}$$

$$= \frac{25}{50} \cdot 10^{-2} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ eller } 0,5\%$$

Den absolute usikkerhet er $s_f \approx 12 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \approx 0,06 \text{ cm}$

Til orientering og ettertanke kan nevnes at dersom vi hadde innført $(a+b)=c$ i nevneren, anslått usikkerheten i c til ca. 0,4 cm og regnet med usikkerhetsformelen for logaritmisk uttrykk, så ville vi fått en usikkerhet som er ca. 3 ganger så stor som den vi har beregnet i det foregående. Hvorfor er dette galt og hvorfor blir det gale resultatet større enn det riktige?

Den prinsipielle feil vi gjør ved å innføre c og bruke usikkerhetsformelen for logaritmisk uttrykk er som nevnt tidligere, at vi da forutsetter at de tre størrelsene a, b og c er indbyrdes uavhengige. Dette er åpenbart ikke tilfelle her, idet c helt og holdent og entydig er bestemt av a og b. En bestemt variasjon i a f.eks. vil føre til en helt bestemt variasjon av c.

I vårt tilfelle hvor både a og b er positive fører dette til at resultatet f blir mindre følsomt overfor variasjoner i a og b enn det ville vært om teller og nevner kunne variere uavhengig av hverandre. Slik det nå er, vil f.eks. en for stor verdi for b gi for stor verdi både av teller og nevner, og derfor bety relativt lite for verdien f av brøken. Derfor får vi her en så lav usikkerhet som ca. 0,5%. Hvordledes ville dette arte seg om b hadde vært negativ og numerisk mindre enn a?

Planlegging av måling. Toleranse og faktisk usikkerhet

I det foregående er det hele tiden forutsatt at målingene er utført, at vi kjenner usikkerhetene på de enkelte målinger som inngår i resultatet, og at vi bruker usikkerhetsformlene til å beregne usikkerheten i resultatet. Usikkerhetsformlene er imidlertid også et nyttig og nødvendig grunnlag ved planlegging av målinger. I praksis har man ofte den situasjon at det er ønsket eller krevet at en måling skal utføres slik at usikkerheten i

La oss igjen se på eksemplet med måling av rektangelarealet A , fordi dette problemet er så gjennomsliktig. Det dreier seg om å bestemme et areal $A = x \cdot y$ på ca. $(10 \cdot 100) \text{ cm}^2$. Det forlanges at usikkerheten i A ikke skal overstige 1%. Hvor nøyaktig må vi måle x og y ? Vi har logaritmisk formel

den nøyaktighet som blir krevet.

Neste skritt er da å vurdere om målingene virkeliggjør seg utføre med lingene kunne utføres slik at de bidrar vesentlig til usikkerheten. Den at en enkelt måling "spiser opp" hele toleransen. Da må de øvrige målinger få man vurdere andre måter å fordele toleransen på. Ofte er situasjonen Dette kalles jevn fordeling av toleransen. Fører dette til urimeligheter, se hva det fører til om man gjør hvert av leddene under rottegnet like store. For valg av enkeltusikkerhetene, kan man som et utgangspunkt begynne med å grunnlag av erfaring eller andre forhold ikke har noe bestemt utgangspunkt slik at den samlede usikkerhet blir mindre enn toleransen. Dersom man på Tilbake står da bare å velge verdier for de enkelte usikkerhetene (s_x, s_y, \dots) rende målinger. De tilnærmede verdiene settes så inn i usikkerhetsuttrykket. nærmede verdier kan man ofte skaffe seg "på øyemål" eller ved noen orienterte det ved en veining dreier seg om å måle mg, kg, eller tonn osv. Slike til- må videre vite omtrent verdien av de størrelser som skal måles, f.eks. om får det generelle uttrykket for usikkerheten på den aktuelle målingen. Vi kerhetsformlene på den formel som skal brukes ved målingene, slik av vi- Utgangspunktet for slike vurderinger er alltid å anvende en av usik-

hvilke verdier det er tale om å måle, osv.

vil kunne avhenge av flere ting, bl.a. hva slags hjelpemidler man har, finne en passende måte å utføre målingene på. Hva som er "den beste måten" enn toleransen. Man må vurdere situasjonen i hvert tilfelle og prøve å hetsbidrag fra enkeltmålingene som kan gi en usikkerhet i resultatet mindre er bare ett "riktig" svar på dette. Det er mange kombinasjoner av usikker- med planlegging av målinger med gitt toleranse. Det er klart at det ikke resultatet?" Å besvare dette spørsmålet er en meget viktig del av arbeidet problemet: "Hvor nøyaktig må vi da måle hver av de størrelsene som inngår i Når vi har gitt en toleranse eller tillatt usikkerhet, står vi overfor er utført.

forhand. Den faktiske usikkerhet kan vi bare si noe om etter at målingene sultatet ikke er større enn 1%. Toleransen stilles opp som et krav på 1% vil si at målingen skal utføres slik at den faktiske usikkerhet i re- usikkerhet kaller vi for toleransen for målingen. En måling med toleranse resultatet ikke overskrider en viss verdi. Et slikt krav eller tillatt

og kan sette $s_A/A = \sqrt{(s_R/\lambda)^2 + (s_P/b)^2} < 10^{-2}$. Bruker vi som utgangspunkt jevn fordeling av toleransen, får vi: $s_R/\lambda = s_P/b < \sqrt{2} \cdot 10^{-2}$. For måling av lengden λ får vi da kravet: $s_R < (\sqrt{2} \cdot 10^{-2}) \cdot 100 \text{ cm} \approx 0,7 \text{ cm}$. For måling av bredden b på ca. 10 cm kan vi tillate en usikkerhet på $s_P < 0,07 \text{ cm}$.

Hvis vi regner med å utføre målingene med vanlig målestav med mm-delning, kan nok begge krav tilfredsstilles, selv om det kan bli litt "på kanten" for måling av bredden. Som det fremgår av de tidligere eksemplene med rektangler let så vil måling av både λ og b med usikkerhet på 1 mm gi en usikkerhet i A på 1%, idet bidraget fra måling av λ da er uvesentlig. Fra et praktisk synspunkt synes det derfor i dette tilfelle mer fornuftig å utføre målingen på den sistnevnte måten, altså å måle lengde og bredde med en usikkerhet som ikke overstiger 1 mm. Dette bør kunne gjøres, i alle fall hvis vi har en målestav på vel 1 m. Har vi bare en stav på 20 cm, kan det bli mer tvilsomt om vi kan bestemme λ med usikkerhet mindre enn 1 mm. Da kan det nok kanskje være bedre å måle bredden med usikkerhet på ca. 0,5 mm.

I dette eksemplet betyr det ikke noe i øket arbeid, utstyr eller omkostninger å måle bredden med usikkerhet på 0,5 mm istedenfor på 1 mm. I

at målingen krever vesentlig mer både av tid, arbeid og utstyr. Det er

derfor en alminnelig regel at man ikke skal utføre en måling nøyaktigere enn nødvendig i forhold til de krav som stilles, dersom dette medfører

øket arbeid og omkostninger. Det anses som galt å utføre en måling på en

slik måte at den tar en hel dag med bruk av kostbart utstyr, dersom man for det aktuelle formål kunne nøyet seg med en måling som tar noen minutter med

enkelt utstyr.

Forøvrig henvises til det følgende avsnitt med et mer utførlig eksempel på planlegging av målinger med toleranse.

Også om en måling skal utføres "så nøyaktig som mulig" bør man foreta

slike vurderinger som er angitt ovenfor. Det at resultatet skal være så nøyaktig som mulig behøver ikke å bety at hver enkelt størrelse behøver å

måles så nøyaktig som mulig. Svært ofte er situasjonen den at det er en

eller et par målinger som setter grensen for hvor nøyaktig resultatet kan

bli, mens de øvrige størrelsene relativt enkelt kan måles slik at de ikke

bidrar vesentlig til usikkerheten. Man har da ikke noe igjen for å legge

arbeid i å måle disse størrelsene mere nøyaktig, selv om dette i og for seg

lar seg gjøre.

Vi ser på et enkelt eksempel. Volumet V av en metallrød skal

bestemmes "så nøyaktig som mulig" ved å måle diameteren d som er ca. 0,5 mm og lengden l på ca. 50 cm. For volumet får vi $V = (\pi d \cdot l) / 4$. Vi har logaritmisk formel og kan sette $s^V / V = \sqrt{(2s^P/d)^2 + (s^l/l)^2}$. Med de hjelpemidler vi har kan vi regne med å måle diameteren d med en usikkerhet på ca. 0,01 mm. Nøyaktigere kan vi ikke gjøre den målingen. Vi får da at $(2s^P/d)^2 = (2 \cdot 0,01/0,5)^2 = (4 \cdot 10^{-2})^2 = 16 \cdot 10^{-4}$, som svarer til en usikkerhet på 4% i volumet. Hvis vi nå kan måle lengden så nøyaktig at $(s^l/l)^2 \approx 10^{-2}$ så vil denne målingen ikke bidra vesentlig til usikkerheten i V . Da $l \approx 50$ cm vil det si at vi må måle l med en usikkerhet $s^l \leq 10^{-2} \cdot 50$ cm = 0,5 cm. Det er en måling som vil være meget enkel å utføre, og i denne spesielle sammenheng et denne målingen likeverdig med "så nøyaktig som mulig". Vi vil ikke få noe nøyaktigere resultat om vi legger tid og arbeid i å måle l med vesentlig mindre usikkerhet, f.eks. 0,1 mm, selv om dette kanskje ville være mulig med det utstyret vi har. Vi kan ikke gjerne måle l med en vanlig målestav med mm-delning.

Ved alle målinger bør man gjøre slike overslag over usikkerhetsbidragene, dels for å unngå at man "ødelegger" målingen ved å måle unøyaktig hvor det burde og kunne vært målt bedre, og dels for å unngå å legge unødig arbeid i nøyaktige målinger når dette er uten betydning for resultatet.

Som en del av planlegging av en måling inngår også en vurdering av mulige feil i forhold til usikkerheten. Ved mange målinger er det åpenbart at målingen er beheftet med feil, f.eks. ved veining hvor vi ikke tar hensyn til oppdrift i luften. Hvis feilen er liten i forhold til usikkerheten, vil en retting (eller korreksjon) av feilen ikke føre til et sikrere eller "riktigere" resultat, og det er da vanlig å se bort fra feilen og spare arbeidet med korreksjonen. Er måleusikkerheten 1% og feilen 0,1%, så vil korreksjonen ikke gi seg utslag i resultatet i det hele tatt med de regler for antall sifrer vi vanlig bruker. Ofte kan en måling planlegges og utføres slik at feilene blir så små at vi kan se bort fra dem.

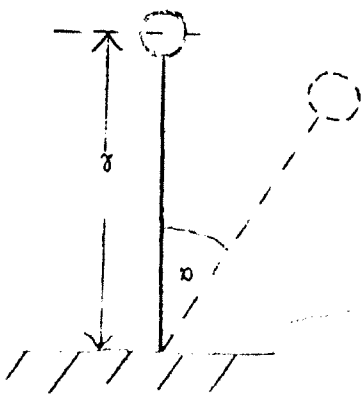
Hovedtrekk i planlegging og utførelse av måling med toleranse. Eksempel.

1. Formulere oppgave

Som eksempel tar vi her følgende måleopppdrag: Tynghets akselerasjon g skal måles med en relativ usikkerhet mindre enn 1%.

2. Velge metode

Valg av metode vil foruten av oppgavens art være avhengig av forskjellige ting, bl.a. hva slags hjelpemidler man har, hvilken erfaring man har osv. Vi velger her å bestemme g ved å måle lengden λ og svingetid T for en tråpendel (kuleformet lodd i tynn, lett snor).



3. Sette opp formel

Formelen tilsvarende $R = R(x, y, z, \dots)$ i den generelle fremstillingen. Den skal gi resultatet som funksjon av de direkte målte størrelsene.

Vi lar T bety svingetiden for en hel svingning, dvs. mellom to likevektspassasjer i samme retning. Da har vi $T = 2\pi\sqrt{\lambda/g}$ som gir

$$g = 4\pi^2 \lambda / T^2 = 4\pi^2 \lambda T^{-2}$$

4. Sette opp usikkerhetsformel

Formelen skal vise hvorledes usikkerheten i resultatet avhenger av

usikkerhetene i de forskjellige målingene. Om man vil bruke den absolute eller relative usikkerhet kan variere fra tilfelle til tilfelle.

Vi har i vårt eksempel logaritmisk formel hvor λ og T er innbyrdes uavhengig målte størrelser. Vi bruker usikkerhetsformelen for logaritmisk uttrykk og får

$$\frac{s_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{s_\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(2 \frac{s_T}{T}\right)^2}$$

5. Bestemme tilnærmede verdier

Tilnærmede verdier for de størrelser som skal måles kan man skaffe seg ved enkle prøvemålinger, ved skjønn "på øyemål", de kan være oppgitt av oppdragsgiver e.l.

Vi har i vårt eksempel en pendel med lengde λ ca. 1 m (øyemål) og prøvemåling viser at T er ca. 2 s.

6. Fordele toleransen og formulere krav til målingene

Denne del av oppgaven har ikke en løsning som er riktig mens alle andre er gale. Kravet til usikkerhet i resultatet er gitt, men det kan ofte være flere måter å oppnå dette på som alle vil være akseptable. Hvorledes man vil innrette målingene er ofte gjenstand for et valg ut fra hva man i den aktuelle situasjon anser som hensiktsmessig.

I vårt eksempel er kravet til resultatet gitt ved

$$s_g/g = \sqrt{(s_\lambda/\lambda)^2 + (2 s_T/T)^2} \leq 10^{-2} \quad (\text{Toleransen})$$

Velger vi som utgangspunkt jevn fordeling av toleransen, dvs. at begge ledd i uttrykket for usikkerheten er like store, får vi

$$s_\lambda/\lambda \leq \sqrt{2} \cdot 10^{-2}, \text{ som gir } s_\lambda \leq \sqrt{2} \cdot 100 \text{ cm} \approx 0,7 \text{ cm}$$

$$2 s_T/T \leq \sqrt{2} \cdot 10^{-2}, \text{ som gir } s_T \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 2 s \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

7. Vurdere om og hvorledes kravene kan oppfylles

Ved slike vurderinger spiller selvfølgelig erfaring med målinger og kjennskap til måleutstyr en stor rolle. I en aktuell situasjon vil det også være av avgjørende betydning hva slags utstyr man har til disposisjon.

Måling av en lengde λ på ca. 1 m med usikkerhet mindre enn 0,7 cm er i alminnelighet enkel, og kan utføres med vanlig målestav. Vanskeligheten blir her å definere lengden λ fra hvilket punkt til hvilket punkt skal det måles. Definisjonsusikkerheten kan bli stor. Med tynn snor og kuleformet lodd og homogent materiale bør kravet til lengdemåling kunne oppfylles ved måling med vanlig meterstav.

Måling av svingetiden T på ca. 2 s med usikkerhet mindre enn $7 \cdot 10^{-3}$ s kan ikke gjøres for en enkelt svingning med vanlige ur. Muligheten er tilstede ved å bruke elektronisk ur og automatisk start og stopp. Dersom man må hjelpe seg med vanlig ur, kan den ønskede nøyaktighet oppnås ved å måle tiden for flere svingninger.

Måles tiden T_n for n svingninger med en usikkerhet s_{T_n} har vi

$$T = \frac{n}{T_n}$$

$$s_T = \frac{1}{n} s_{T_n}$$

Ved å måle tiden for n svingninger hvor $n = \frac{s_T}{s}$ kan kravet $s_T \leq 7 \cdot 10^{-3}$ s oppfylles. Kan vi f.eks. måle tiden T_n med usikkerhet på ca. 1 s. ($s_T = 1$ s) fører dette til

$$n = \frac{1s}{7 \cdot 10^{-3}} \approx 150.$$

Kravet til måling av svingetid kan f.eks. oppfylles ved å måle tiden for 150 svingninger med usikkerhet på ca. 1 s.

Har vi et stoppeur hvor vi anslagsvis kan regne med en usikkerhet $s_T \approx 0,2$ s, så kan vi nøye oss med å måle tiden for $0,2/0,007 \approx 30$ svingninger.

8. Vurdering av feil og korreksjoner

Arbeidet under dette punkt vil på planleggingsstadiet stort sett ha som mål å innrette målingene slik at mulige feil blir så små at man kan se bort fra dem i forhold til usikkerheten.

I vårt eksempel har vi brukt en formel for svingetiden som forutsetter infinitesimale (uendelig små) utslag. Ved praktiske målinger må vi bruke et visst utslag på pendelen (se fig. under 2). Det kan vises at dette fører til en relativ feil i T som kan skrives $(\alpha/4)^2$, hvor α er vinkelutslaget i radianer. Dersom vi her krever at denne relative feil skal være mindre enn 10^{-4} , kan feilen ansees som ubetydelig i forhold til måleusikkerheten i T . Kravet $(\alpha/4)^2 < 10^{-4}$ fører til at utslaget av kula fra likevekstiltingen må være mindre enn 4 cm.

Andre mulige feil som det kan være grunn til å se på er om pendelen er hengt opp slik at den virkelig svinger om opphengningspunktet, og om snoren er så lett at vi kan regne at tyngdepunktet for hele pendelsystemet ligger i sentrum av kula.

9. Velge måleutstyr. Stille opp måleforskrift

Under dette punkt trekker man konklusjonen av hele det foregående planleggingsarbeid.

I vårt eksempel kan det være rimelig å angi som måleutstyr en målestav på minst 1 m lengde med deling i mm, og et stoppeur med deling i 0,1 s.

Som måleforskrift (for dem som ikke har vært med på hele den foregående vurderingsprosess) kan det angis følgende:

"Lengden av pendelen skal måles fra opphengningspunktet til sentrum av kulen med usikkerhet som ikke overstiger 0,5 cm. Svingetiden bestemmes ved å måle tiden for ca. 30 svingninger med en usikkerhet som ikke overstiger 0,2 s".

10. Utføre målinger. Bestemme faktisk usikkerhet for de enkelte målinger

Måling av de enkelte størrelsene utføres selvfølgelig slik man er kommet fram til under planleggningen. For hver av de målte størrelsene skal man også angi den faktiske usikkerhet, slik som er angitt i kapitlet om gjentakelsesmålinger. Selv om man f.eks. for en lengdemåling kan tillate en usikkerhet på 1 cm, så er det jo godt mulig at målingen like lett blir målt med en usikkerhet på 1 mm. Da er den faktiske usikkerhet 1 mm.

I vårt eksempel ga målingene følgende resultater:

$\lambda = 99,6$ cm Usikkerheten s_λ er anslått til 0,2 cm

$T_{30} = 60,1$ s som gir $T = 2,003$ s

Usikkerheten $s_{T_{30}}$ ble bestemt på grunnlag av noen gjentakelsesmålinger til ca. 0,1 s. ($s_{T_{30}} \approx 0,1$ s), som gir $s_T \approx 0,003$ s.

11. Beregning av resultatet

Beregningen utføres ved innsetting av måleverdiene i formelen (pkt. 3).
 Dersom en måleverdi er behøftet med feil som ikke er uvesentlig i forhold til den faktiske usikkerhet på vedkommende måling, må måleverdien korrigeres for innsetting.
 Tallregningene utføres med så mange siffrer at man ikke "ødelegger" den nøyaktighet som enkeltmålingene tilsier.

Vi kan i vårt eksempel regne med at usikkerheten i resultatet ligger i underkant av 1%. Vi bør da utføre tallregningene med 4 siffrer (også for π) og eventuelt runde av senere. Ingen av måleverdiene bør korrigeres. Vi får da

$$g = 9,806 \text{ m/s}^2$$

12. Beregne den faktiske usikkerhet i resultatet

Beregningen utføres ved å sette inn i usikkerhetsformelen (pkt. 4) de avslatte verdiene for de faktiske usikkerheter i de utførte målingene. Vi får i vårt tilfelle

$$s_g/g = \sqrt{(s_\lambda/\lambda)^2 + (2 s_{T/T})^2 + (2 s_{T/100})^2 + (2 \cdot 0,003/2)^2} \approx 0,4 \cdot 10^{-2}$$

Den absolutte usikkerheten er ca $s_g \approx 0,04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

13. Angi det endelige resultat og usikkerheten

Man må her vurdere antall siffer som det er rimelig å ta med, og ellers gi resultatet på den form som anses mest hensiktsmessig.

I vårt tilfelle vil det være rimelig når vi har en faktisk usikkerhet på ca. $0,04 \text{ m/s}^2$, å runde av verdien for g til 3 siffer. Resultatet kan f.eks. angis

$$\underline{g = (9.81 \pm 0,04) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

Siden toleransen er gitt som 1%, kan det kanskje være vel så bra å angi resultatet slik:

$$\underline{g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \text{ . Anslått usikkerhet er ca. } 0,4\%$$

Generelt om tegning av diagrammer

En grafisk fremstilling (diagram) viser hvorledes den ene av to størrelser varierer når den andre endres.

Ofte går målinger ut på å finne sammenheng mellom to målte størrelser, f.eks. hvorledes resistansen for en leder varierer med temperaturen. I slike tilfeller gir en grafisk fremstilling en god oversikt over målingene, man kan se tendenser i sammenhengen, om det er proporsjonalitet, man kan kontrollere om observerte verdier svarer til det man kan vente teoretisk osv., osv.

Det vanligste er å bruke rettvinklet koordinatsystem. Den størrelsen som endres avsettes langs absisissen, mens den avhengige størrelsen avsettes langs ordinaten. I det eksemplet som er nevnt avsettes temperaturen langs absisissen, resistansen langs ordinaten.

Når det brukes lineær skala, bør det brukes mm-papir til grafiske fremstillinger. I mange tilfeller er det gunstig å bruke logaritmisk deling av en eller begge aksene. For denslags formål finnes spesial-papirer (enkelt logaritmisk og dobbelt logaritmisk papir, eller log-papir og log-log-papir). Hver akse omfatter et visst antall dekadere. Da man ved slik ferdig deling ikke kan velge målestokken fritt, må man på forhånd vite hvor stort område man har behov for.

Formålet med en grafisk fremstilling kan dels være å gi oversikt og være en illustrasjon, dels å danne grunnlaget for kvantitative beregninger. I det følgende er det stort sett det siste formål det er tatt sikte på. Ved tegning av et diagram er det visse alminnelige regler som skal følges:

a. Påskriftler.

Et diagram skal være mest mulig selvforstått med opplysninger slik at man slipper å slå tilbake i en tekst for å finne hva dette eller hint står for.

Det skal være en figurtekst som angir hva diagrammet fremstiller, f.eks. "Tellehastighet for GM-rør som funksjon av absorberbarhet", "Strøm i en RC-krets som funksjon av frekvensen ved konstant spenning" osv. På hver av aksene skal det være angitt hvilken størrelse som er av-satt langs aksene, symbolet som er brukt for denne størrelsen, hvilken

enhet som er brukt og et passende utvalg av tall. Størrelse, symbol, enhet og tall er "standard utstyr" på hver av aksene.

Det er ingen bestemt måte som dette skal gjøres på. Det vesentlige er at det er klart entydig og fullstendig. Når det gjelder utvalg av tall, avsettes gjerne noen "runde tall" slik at det er lett å orientere seg på akse. Tall som spesielt gir verdien for målte punkter skal ikke avsettes på aksene.

b. Målestokk

Målestokken bør velges slik at usikkerheten i de enkelte målepunktene tydelig kan merkes av og ikke forsvinner i strektykkelsen. Skalaindelningen skal være slik at det er lett å lese av tallverdier og merke av punkter i diagrammet. Brukes mm-papir bør man ikke velge en skala slik at 1 cm f.eks. representerer 7 °C, men heller velge 5 °C, 10 °C eller en annen "rund" verdi som kan passe. Man må unngå skaladelinger som gjør kurven sammentrykt i den ene retningen.

c. Markering av målepunktene

De enkelte målepunktene skal markeres tydelig med et eller annet symbol (prikk, sirkel, kryss, firkant e.l.) og slik at ikke markeringen forsvinner i strektykkelsen for kurven. Et det flere kurver i samme diagram, brukes ulike symboler for hver kurve og/eller de enkelte kurver markeres ved forskjellige strektyper (tett strek, stiplet, prikket, ulike farger osv.).

Usikkerheten på måleverdiene markeres ved vertikale og horisontale streker som angir usikkerhetsområdet.

d. Tegning av kurve

De avmerkede måleverdiene er usikre. En kurve som tegnes på grunnlag av punktene behøver derfor ikke nødvendigvis å gå gjennom hvert av de markerte punktene. Man vil da få en hakket eller bølget kurve som må antas å gi et dårlig bilde av den funksjonsammenheng mellom de målte størrelsene som man ønsker å finne ved målingene. Det er derfor i slike tilfeller rimelig og vanlig å trekke kurven "på beste måte" som en jevn, kontinuerlig kurve med målepunktene på eller jevnt fordelt omkring kurven, og slik at kurven går gjennom de angitte usikkerhetsområdene for målepunktene. Kurven skal tegnes med en klar og jevn strek.

I noen tilfeller er det vanlig å tegne kurven som rette linjer mellom målepunktene. Dette gjelder bl.a. for korreksjonskurver som angir den tom målepunktene. Det legges til en avlest verdi for å få den riktige verdien.

Målinger tar ofte sikte på å undersøke sammenhengen mellom to størrelser, f.eks. sammenhengen mellom strøm og spenning i en krets, hvorledes intensiteten av stråling avhenger av avstand eller av tykkelse av absorbatortensitet, sammenheng mellom temperatur og spenning for et termoelement, osv. Undersøkelsen har ofte et dobbelt siktepunkt, dels å kontrollere om en bestemt antatt teoretisk sammenheng mellom størrelsene virkelig er tilstede (f.eks. om strømmen er proporsjonal med spenningen eller om strålingsintensiteten avtar eksponentielt osv.), dels å bestemme verdien av konstanter i en slik sammenheng, (f.eks. proporsjonalitetsfaktoren spenning/strøm, eller eksponenten i en eksponentialfunksjon). Slike undersøkelser kan ofte med fordel på enkel måte utføres på grunnlag av grafiske fremstillinger ved det vi kaller grafisk utjevning.

Utgangspunktet er alltid et diagram hvor målepunktene er avsatt med

markering av usikkerheten.

Har vi f.eks. to størrelser som etter teorien må antas å være proporsjonale så må målepunktene i diagrammet ligge på en rett linje om denne antagelsen er riktig. Fordi måleverdiene har en viss usikkerhet, kan vi ikke vente at de avmerkede målepunkter skal ligge nøyaktig på en rett linje.

De verdiene vi har avsatt er de vi anser som "de beste", men vi må akseptere at kanskje en annen verdi innenfor usikkerhetsområdet kan være like "riktig". Hvis vi derfor, ved å regulere eller "rugge på" de enkelte punktene innenfor sine respektive usikkerhetsområde kan få dem til å ligge på en rett linje, så er det rimelig å si at alingene i dette tilfellet bekræfter at de to størrelsene er proporsjonale. Vi sier da gjerne at målingene viser at

"innenfor måleusikkerheten" er det proporsjonalitet mellom de to størrelsene. En slik tilpassing av målepunkter er det vi kaller en grafisk utjevning, og det er rimelig å anta at den kurven vi på denne måten kommer frem til gir "den beste" beskrivelse av sammenhengen mellom de to størrelsene

som det er målt sammenhørende verdier av.

I praksis utføres grafisk utjevning ved at vi "på beste måte" trekker en kurve (i ovenstående eksempel en rett linje) i forhold til målepunktene. "På beste måte" vil si at kurven bør ligge innenfor usikkerhetsområdet for de enkelte punkter og slik at punktene ligger mest mulig jevnt og tilfeldig fordelt på begge sider av kurven. Her kommer det alltid inn en viss grad av skjønn og "øyemål", om en utjevning kan anses som "rimelig" eller ikke. (Se fig.)

Grafisk utjevning er enklast å utføre når den teoretiske kurven er en rett linje. Som det fremgår av neste avsnitt kan man ofte ved å velge passende skalaer på aksene innrette seg slik at det grafiske bilde av den sammenheng vi undersøker blir en rett linje.

Minste kvadraters metode

Vi har sagt at vi ved utjevning skal legge en kurve "på beste måte".

Mer presist kan dette angis slik: Den beste kurven er den hvor kvadrat-

summen av avvikene mellom kurven og de enkelte målepunktene er minst mulig.

(Utjevning etter minste kvadraters metode). Denne utjevning kan gjøres rent

regnemessig. Dersom det er en lineær sammenheng $y = Ax + B$, og den rela-

tive usikkerhet i x er liten i forhold til den relative usikkerhet i y , og

vi har målepunktene $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$, så er de beste verdier for

A og B gitt ved:

$$A = \frac{\sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\sum x^2 - (\sum x)^2} \quad B = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x y \cdot \sum x}{\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$s_A = \frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{\sum x^2} \cdot s_y \quad s_B = \frac{N \sum x^2 - (\sum x)^2}{\sum x^2} \cdot s_y$$

Ved enklere målinger vil en omhyggelig utført grafisk utjevning være fullt

tilstrekkelig for de fleste formål, og er raskere og enklere enn beregningene.

Eksempel: Strekning av fjær.

Mellom y og x antas sammenhengen $y = Ax + B$.

(Hookes lov) hvor y er posisjon på en skala.

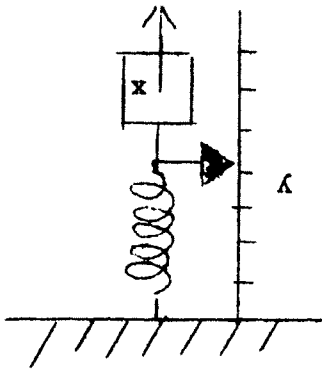
x er belastning.

Det er foretatt måling av 6 sammenhengende

verdier av x og y . A og B bestemte ved

utjevning etter minste kvadraters metode,

idet usikkerhet i x er uten betydning.

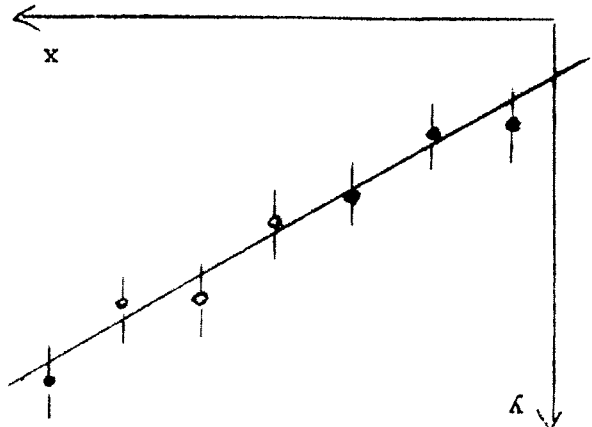


Utjevning til en rett

linje er rimelig.

Punktene ligger tilfel-

dig fordelt.



Utjevning til rett linje neppe

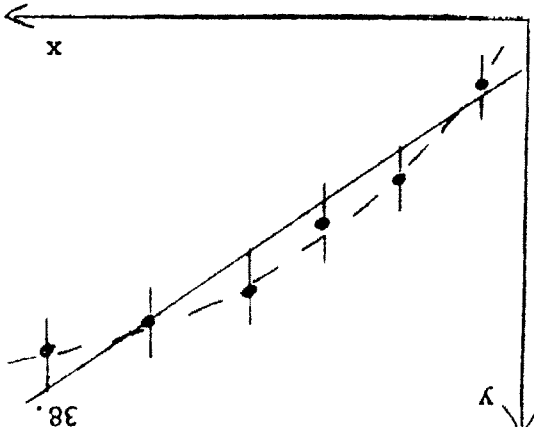
forvarsilig. Selv om linjen

går gjennom usikkerhetsområdene,

er avvikene svært systematiske.

Den stippledde kurven er rimeli-

gere som "den beste" kurven.



Ved innsetning i form-
lene for A og B får vi

$$A = 0,78 \text{ g/cm}$$

$$B = 0,65 \text{ cm}$$

Nr.	x (g)	y (cm)	x.y (g.cm)	x ² (g ²)
1	0	0,8	0	0
2	1,0	1,2	1,2	1
3	2,0	2,3	4,6	4
4	3,0	2,9	8,7	9
5	4,0	3,9	15,6	16
6	5,0	4,5	22,5	25
N=6	15	15,6	52,6	55

(Grafisk utjevning gav A = 0,77 g/cm, B = 0,7 cm)

Eksempler på kvantitativ bruk av grafiske fremstillinger

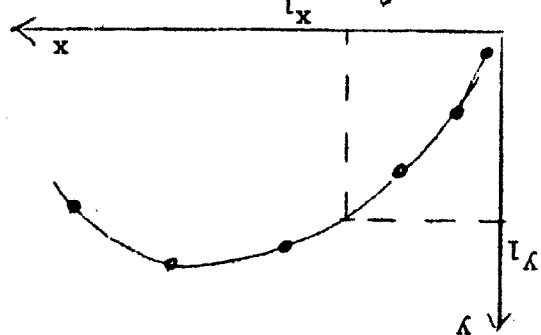
Grunnlaget er en utjevnet kurve tegnet på grunnlag av målepunkter. I de følgende figurer er stort sett bare kurven, ikke målepunktene, inn-

tegnert.

a. Interpolasjon

Kurven brukes til å bestemme andre sammenhengende verdier av x og y

enn de som er målt, f.eks. (x₁, y₁).

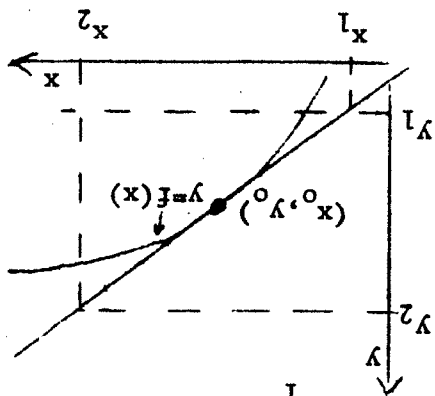


b. Grafisk derivasjon

Verdien av den deriverte av funksjonen y = f(x) for verdien x = x₀ bestemmes ved å trekke tangenten til kurven i punkt (x₀, y₀). Den deriverte er stignings-

forholdet for tangenten:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



hvor (x₁, y₁) og (x₂, y₂) er to vilkårlige punkter på tangenten.

Ved bestemmelse av stigningsforholdet skal man og må man ikke måle av-

standene (y₂ - y₁) og (x₂ - x₁) i cm i diagrammet og bestemme vinkelen, men lese av verdiene x₁, x₂, y₁ og y₂ i de respektive punktene på aksene og

med benevnning. Dette gjelder generelt for bestemmelse av stigningsforhold.

Stigningsforholdet er i allmønelighet en benevnt størrelse.

Er f.eks. y en avstand i cm og x en tid i sekunder, så viser kurven posisjonen av et punkt som funksjon av tiden. Stigningsforholdet får da i dette tilfellet benevnning cm/s og gir oss punktets hastighet ved tidspunkt x₀ i posisjon y₀.

c. Grafisk integrasjon

Verdien av det bestemte integral

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ bestemmes ved å måle arealet mellom kurven og x-aksen ($y = 0$), og

mellom ordinatene i x_1 og x_2 . (Det skraver

verte arealet i figuren). I praksis kan

dette gjøres ved oppdeling i rektangler

som så vidt mulig tilsammen har samme areal som det skraverete området.

Lengde og bredde av rektanglene må angis i den målestokk og med den benev-

ning som er brukt på aksene

Er f.eks. y en kraft i Newton og x en avstand i meter, får "arealet"

og dermed integralet benevnningen $N \cdot m$ (og ikke cm^2). Arealet gir oss i

dette tilfelle det arbeid som kraften y har utført på strekningen fra

x_1 til x_2 .

I et annet tilfelle kan f.eks. y angi hastigheten av en bil som

funksjon av tiden x . Er y angitt i km/time og x i timer, får arealet

benevnningen (km/time) · time = km. I dette tilfelle er arealet et mål for

hvor langt bilen har kjørt i tiden mellom tidspunktene x_1 og x_2

d. Bestemme konstantene A og B i lineær sammenheng $y = Ax + B$

Det brukes lineær skala på begge aksene.

Kurven blir en rett linje. Vi velger to

vilkårlige punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

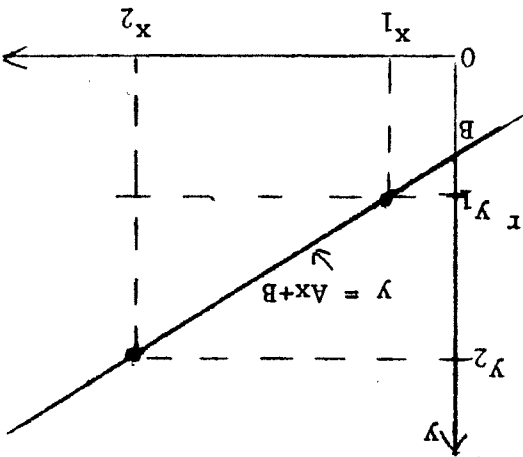
på linjen. Punktene bør ligge langt fra

hverandre og merkes med egne symboler.

Bruk ikke måleverdier. Konstanten A er

bestemt av stigningsforholdet.

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Verdiene av x_1, x_2, y_1 og y_2 angis med benevning (se pkt. b.). A blir

benevnt. Verdien av B leses av der linjen skjærer y -aksen (ordinaten

gjennom $x = 0$).

Hvis f.eks. kurven viser lengden y av en elastisk fjær angitt i cm

som funksjon av en strekk-kraft x angitt i N , så får A benevning

(cm/N) og B benevning cm. I et annet tilfelle kan kurven vise resistansen

y for en metalltråd som funksjon av temperaturen x . Er y angitt i ohm

og x i $^{\circ}C$, får stigningsforholdet (og dermed A) i dette tilfellet benev-

ning (ohm/ $^{\circ}C$) og B benevning ohm.

e. Bestemmelse av konstantene A og k i en eksponentiell sammenheng $y = Ae^{kx}$

Det brukes logaritmisk skala for y,

linje for x. Da blir kurven en rett linje. (Enkelt logaritmisk papir).

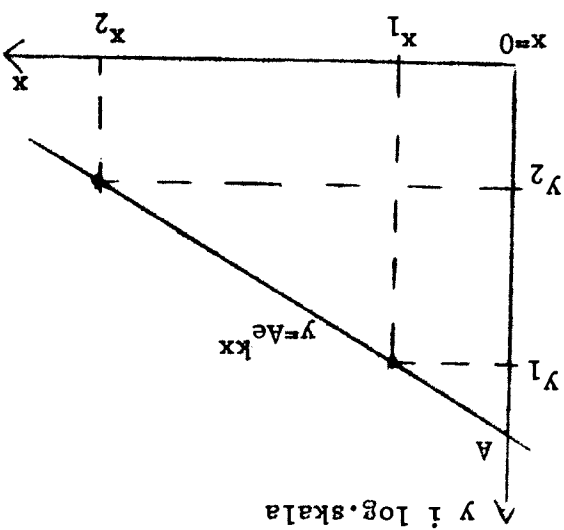
$$\lg y = \lg A + (k \cdot \lg e) \cdot x$$

Konstanten (k.lge) bestemmes av linjens

stigningsforhold

$$k \cdot \lg e = \frac{\lg y_2 - \lg y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \lg e \cdot \frac{x_2 - x_1}{\lg(y_2/y_1)}$$



Konstanten A bestemmes ved kurvens skjæringspunkt med y-aksen (for x = 0).
Er f.eks. y intensiteten av en stråling og x tykkelsen av en absorberator i cm, får k benevnning cm^{-1} .

f. Bestemmelse av konstantene A og n i en sammenheng $y = Ax^n$

Det brukes logaritmisk skala for både

x og y.

$$\lg y = \lg A + n \lg x$$

Kurven blir en rett linje, hvor n er

bestemt av stigningsforholdet, og A ved skjæringspunktet med y-aksen. ($\lg x = 0$).

$$n = \frac{\lg y_2 - \lg y_1}{\lg(y_2/y_1)} = \frac{\lg x_2 - \lg x_1}{\lg(x_2/x_1)}$$

Dette blir et ubenevnt tall.

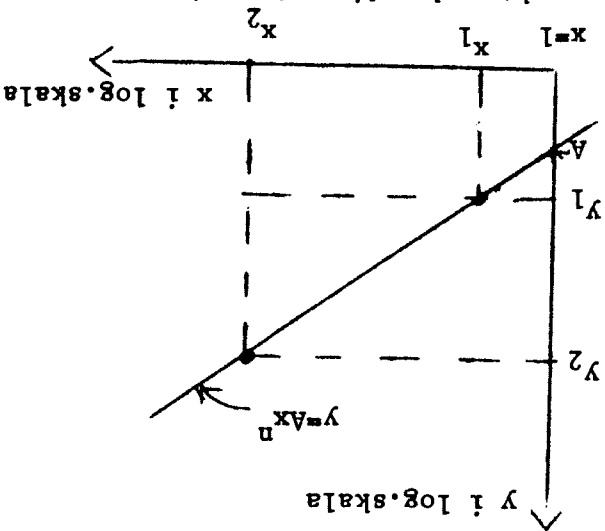
A bestemmes av kurvens skjæringspunkt med ordinataksen i

$\lg x = 0$. (dvs. $x=1$). A får samme benevnning som y.

y kan f.eks. være den motstand et legeme møter når det beveger seg med

hastighet x i en væske. Stigningsforholdet (n) er da et mål for hvor fort

motstanden vokser med hastigheten.



Utleiing av usikkerhetsformlene på side 20-21.

Den størrelsen R som skal måles bestemmer vi ved å måle direkte størrel-
sene x, y, z ... og sette inn i en formel

$$(1) \quad R = R(x, y, z, \dots)$$

Vi gjentar en slik bestemmelse av R i alt N ganger, og setter hver gang
inn i formelen (1) de direkte observerte verdiene av x, y, z, ...

Måling nr.	Observerte verdier	Beregnet måleresultat
1	x_1, y_1, z_1, \dots	$R_1 = R(x_1, y_1, z_1, \dots)$
2	x_2, y_2, z_2, \dots	$R_2 = R(x_2, y_2, z_2, \dots)$
...
N	x_N, y_N, z_N, \dots	$R_N = R(x_N, y_N, z_N, \dots)$

Målingene er utført på samme måte og under samme betingelser, slik at de
kan ansees som likeverdige og inbyrdes navhengige. (se side 5).

For R har vi da fått N verdier med middelværdi \bar{R} og standardavvik

$$(2) \quad s_R = \sqrt{\frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + \dots + (R_N - \bar{R})^2}{N-1}}$$

For hver av størrelsene x, y, z, ... har vi tilsvarende N verdier med
middelværdiene $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ og standardavvikene

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} s_x &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1}} \\ s_y &= \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_N - \bar{y})^2}{N-1}} \end{aligned} \right.$$

osv.

Standardavvikene s_R, s_x, s_y, \dots osv. er mål for usikkerheten i henholdsvis
R, x, y, ... osv.

Prinsipielt er det ingen forskjell på å beregne s_R, s_x, s_y , osv. I praksis kan imidlertid beregning av s_R etter formel (2) bli ganske besværlig fordi man da må beregne verdien av R for hver av de N målingene. Med mange observerte sjoner (stor N) og kanskje også komplisert formel (1) betyr dette et stort og tidkrevende arbeid. Dertil kommer at med liten spredning i R må alle regningene også utføres nøyaktig med mange siffrer. Regner vi med avrundede verdier blir spredningen "borte".

Standardavvikene s_x, s_y , osv. er i praksis meget enklere å bestemme fordi verdiene $(x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)$ osv. er direkte observerte verdier. Ved få gjentagelser er det også bare grunnlag for å angi s_x, s_y , osv. med ett gjeldende siffer, slik at s_x, s_y, \dots ofte like godt kan angis skjønnsmessig eller ved enkelte regninger med avrundede tall. (se side 11-12).

Det praktiske regnearbeid under (3) blir derfor vesentlig raskere og enklere enn ved (2). Det ligger da nær å søke en sammenheng mellom usikkerhetene s_x, s_y , osv. i enkeltmålingene og usikkerheten s_R i resultatet, slik at vi kan unngå bruk av formel (2).

En slik sammenheng som er tilstrekkelig nøyaktig for praktiske forhold ved målinger kan vi finne ved at vi for differensene $(R_1 - \bar{R}), \dots, (R_N - \bar{R})$ i (2) innfører tilnærmede uttrykk slik som angitt på side 18.

Middelverdien \bar{R} skal definisjonsmessig beregnes på grunnlag av verdiene R_1, \dots, R_N . Vi kan med god tilnærming også bestemme \bar{R} ved at vi i (1) setter inn middelveidene \bar{x}, \bar{y}, \dots , osv., slik at vi har $\bar{R} = R(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$.

Vi ser på differensen $(R_i - \bar{R})$. Den svarer til den forandring vi får i verdien av R om x endres fra \bar{x} til x_i , y endres fra \bar{y} til y_i , osv. Endringen fra \bar{x} til x_i vil alene gi en endring i R som kan skrives $(\frac{\partial R}{\partial x})(x_i - \bar{x})$. Endringen av y-verdien vil alene gi en endring $(\frac{\partial R}{\partial y})(y_i - \bar{y})$. Tilsvarende har vi for andre størrelser som inngår i (1).

Samlet vil endringen fra \bar{x} til x_i , fra \bar{y} til y_i , osv. gi en endring i R som blir

$$(R_i - \bar{R}) = R(x_i, y_i, \dots) - R(\bar{x}, \bar{y}, \dots) = (\frac{\partial R}{\partial x})(x_i - \bar{x}) + (\frac{\partial R}{\partial y})(y_i - \bar{y}) + \dots \quad (4)$$

Differensene $(x_i - \bar{x}), (y_i - \bar{y}), \dots$, osv. kan være positive eller negative, ha stor eller liten tallverdi alt etter hvilke verdier vi har for x_i, y_i, \dots osv. Verdierne av de deriverte kan også bli positive eller negative, numerisk store eller små alt etter hva slags uttrykk vi har og hvilke verdier det blir aktuelt å sette inn.

Ved innsetting av (4) i (2) skal vi ha $(R_i - \bar{R})^2$, og får da å kvadrere uttrykket helt til høyre i (4). Dette er et polynom med vilkårlig antall ledd. Generelt får vi da en sum av alle mulige kvadratledd og to ganger alle mulige

produktledd: $(a+b+c+\dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + \dots$

Kvadratsummen i telleren i (2) kan da skrives:

$$\begin{aligned}
 (R_1 - \bar{R})^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 (x_1 - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 (y_1 - \bar{y})^2 + \dots + 2 \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \dots \\
 (R_2 - \bar{R})^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 (x_2 - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + 2 \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots \\
 (R_N - \bar{R})^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 (x_N - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 (y_N - \bar{y})^2 + \dots + 2 \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial R} (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y}) + \dots
 \end{aligned}$$

I (5) er selvfølgelig alle kvadratleddene positive mens faktorene i produktleddene som nevnt kan være positive eller negative, numerisk store eller små. Erfaringsmessig vil observasjonene fordele seg noenlunde symmetrisk om middelverdien. Det er da like stor sannsynlighet for positive som negative avvik, og dette fører til at over et større antall tilfeller vil produktsummen i (5) være tilnærmet null.

Ved innsetting av (5) i (2) får vi da:

$$s_R^2 = \frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + \dots + (R_N - \bar{R})^2}{N-1}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1} + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 \frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_N - \bar{y})^2}{N-1} + \dots$$

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial R}\right)^2 s_y^2 + \dots}$$

idet $[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2] / (N-1) = s_x^2$ osv. Lign. (6) er identisk med (a) på side 20.

(6)

Formel (6) har to vesentlige fordelene fremfor (2). For det første kan alle tallregninger med (6) utføres med avrundede verdier fordi standardavvikene s_x, s_y , osv. bare kan angis med ett eller to siffer. Derfor kan vi også bruke avrundede verdier ved innsetting i uttrykkene for de deriverte. For det annet får vi ved (6) "sortert" usikkerhetsbidragene fra de enkelte målingene som inngår i (1), slik at vi f.eks. kan se hvilken betydning usikkerheten i målingen av x har, osv. Dette er bl.a. av vesentlig verdi om man ønsker å redusere måleusikkerheten.

Formel (b) side 21 fremkommer direkte ved divisjon av (a) med R .

Formel (c) side 21 gjelder bare når formelen (1) for R er av formen

$$R = A x^n y^m z^p \quad (7)$$

Her er A en konstant og n, m, p, \dots hvilke som helst positive eller negative tall. Formelen representerer derfor alle mulige multiplikasjoner, divisjoner, potenseringer og rotutdragninger, men ikke addisjoner og multiplikasjoner.

Vi har for (7):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = A n x^{n-1} y^m z^p \dots$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{A n x^{n-1} y^m z^p \dots}{A x^n y^m z^p \dots} = \frac{n}{x}$$

Tilsvarende: $\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{m}{y}$ osv. som innsatt i (b) side 21 gir (c).