

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Skriftlig eksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022

Dato: Fredag 3. juni 2022, kl 15:00-19:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6).

Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: "Størrelser og enheter i fysikk og teknikk" eller Angell, Lian, Øgrim: "Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler"

Rottmann: "Matematisk formelsamling" Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!

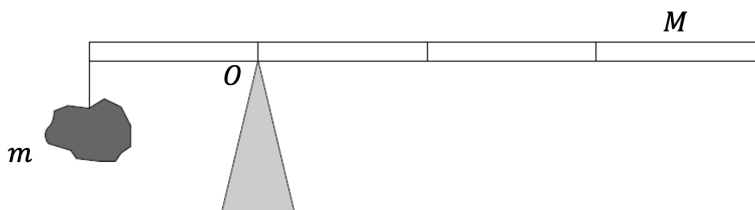
Lykke til!

Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)

Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

1.1 En stein med masse m henger i en masseløs snor fra enden av en homogen, tynn stokk med lengde d . Stokken balanserer på en støtte, og avstanden mellom der snora er festet og punktet O der stokken hviler på støtten, er $\frac{1}{4}d$. Hele systemet er i likevekt (i ro). Hva er massen M til stokken?

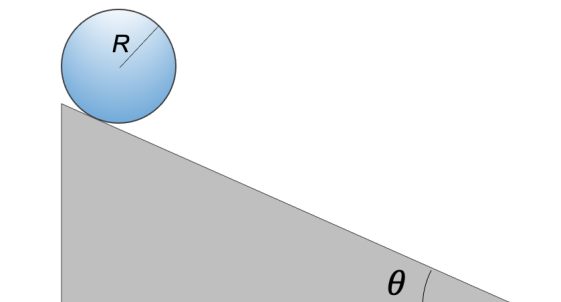
- (a) $\frac{1}{4}m$
- (b) $\frac{1}{2}m$
- (c) m
- (d) $2m$
- (e) $4m$



(3 poeng)

1.2 En brusboks formet som en sylinder med masse m og radius R ruller uten å skli ned et skråplan med helningsvinkel θ . Lengden på skråplanet er b , og den statiske friksjonskoeffisienten er μ_s . Arbeidet som friksjonskraften gjør på brusboksen er

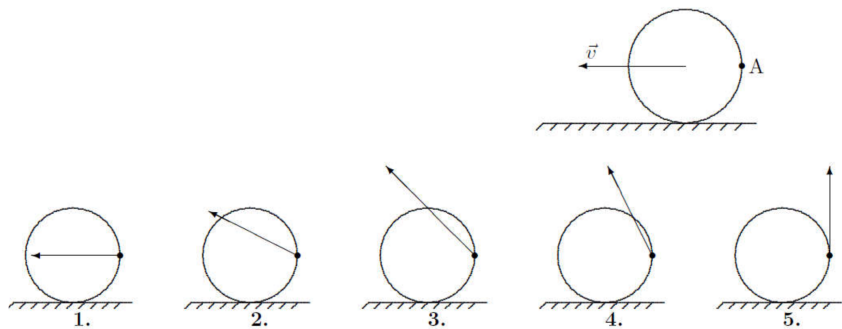
- (a) $W_f = -\mu_s mgb \cos \theta$
- (b) $W_f = \mu_s mgb \cos \theta$
- (c) $W_f = -\mu_s mg \sin \theta$
- (d) $W_f = 0$
- (e) $W_f = \mu_s mgb$



(3 poeng)

1.3 Et hjul med radius R ruller uten å skli på et flatt underlag. Massesenteret beveger seg mot venstre med hastighet $\vec{v}$. Hvilken av figurene viser riktig hastighetsvektor til punktet A på hjulet?

- (a) Figur 1
- (b) Figur 2
- (c) Figur 3
- (d) Figur 4
- (e) Figur 5



(3 poeng)

1.4 Du måler vekten til en masse i Oslo. Så tar du med deg både vekten og massen til et sted ved ekvator, og måler på nytt. Verdien vekten viser i Oslo er

- (a) mindre enn ved ekvator
- (b) den samme som ved ekvator
- (c) større enn ved ekvator

(3 poeng)

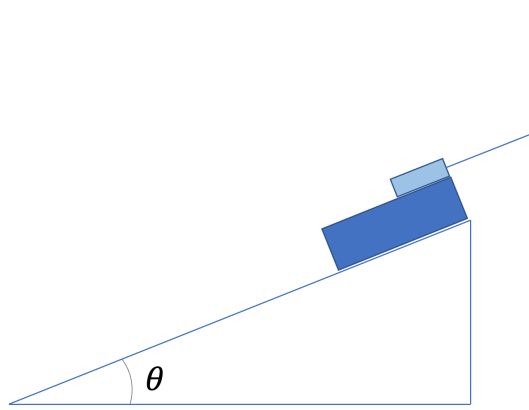
Oppgave 2 Tekstoppgave: En liten og en stor bil kolliderer (6 poeng)

En liten og en stor bil kolliderer med hverandre.

- (a) Hvilken av de to får størst endring i bevegelsesmengde: den store, den lille, eller er endringen i bevegelsesmengden den samme for begge? Bruk impuls i din argumentasjon.
(3 poeng)
- (b) Basert på svaret i a-oppgaven, hvorfor er det større fare for at passasjerene i den lille bilen blir skadet enn passasjerene i den store bilen?
(3 poeng)

Oppgave 3 Regneoppgave: To klosser på et skråplan (18 poeng)

To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel θ som vist i figuren. Den øverste klossen med masse m er festet til en vegg med en snor. Den underste klossen med masse M blir holdt på plass av friksjonskreftene mellom den øvre og den underste klossen, og mellom den underste klossen og skråplanet. Den statiske friksjonskoeffisienten μ_s er den samme for begge kontaktflatene.



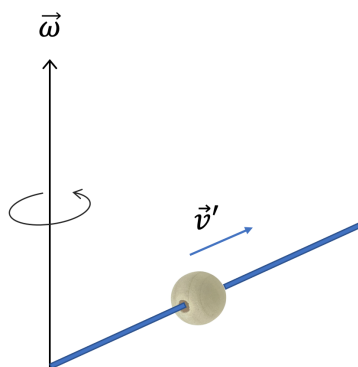
- (a) Tegn to frilegemediagram: ett for den øverste klossen og ett for den nederste klossen. Husk å navngi alle krefter.
(6 poeng)
- (b) Vi øker nå helningsvinkelen θ til skråplanet, helt til den underste klossen begynner å gli. Vis at den kritiske helningsvinkelen θ_{max} idet den underste klossen begynner å gli er gitt ved

$$\tan \theta_{max} = \frac{\mu_s(2m + M)}{M}.$$

- (4 poeng)
- (c) Finn snorkraften på den øverste klossen uttrykt ved θ_{max} , m , M , μ_s , og g .
(2 poeng)
- (d) Ved θ_{max} , så vil den underste klossen gli en lengde d ned skråplanet. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom skråplanet og den underste klossen er μ_d . Vi antar at den øverste klossen er veldig liten i utstrekning, slik at vi kan se bort fra arbeidet gjort av den dynamiske friksjonskraften mellom de to klossene. Vi ser også bort fra luftmotstand. Finn farten til den nederste klossen når den har sklidd ned skråplanet.
(6 poeng)

Oppgave 4 Regne- og numerisk oppgave: En treperle på en stang (12 poeng)

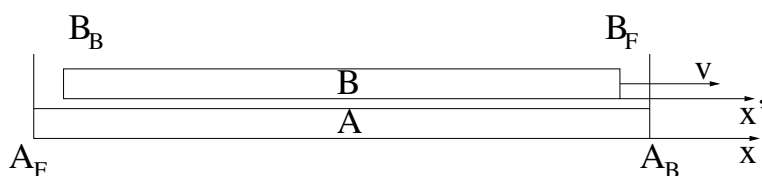
Det er montert en treperle med hull i midten på en tynn, horisontal stang som roterer, se figur. Stangen roterer med en konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}$ om en vertikal akse gjennom den ene enden av stangen. Vi lar S' være referansesystemet som følger stangens rotasjon (med origo i aksens som stangen roterer om), slik at stangen er i ro i dette systemet. Perlen glir utover stangen med konstant fart v' i system S' , og starter i avstand r'_0 (større enn null) fra rotasjonsaksen. Vi ser bort fra luftmotstand, og vi antar at perlen glir tilnærmet friksjonsfritt på stangen.



- Sett opp uttrykket for akselerasjonen $\vec{a}$ i et inertialsystem S som er i ro, og som har origo samme sted som S' . Forklar de ulike leddene i uttrykket for akselerasjonen, og hvilke fysiske størrelser de avhenger av. (4 poeng)
- Vis at de to komponentene til akselerasjonen $\vec{a}$ har størrelse $a_s = \omega^2 r'$ og $a_c = 2\omega v'$. (2 poeng)
- Skissér en kode som beskriver bevegelsen til treperlen sett fra system S . Her er det tilstrekkelig å sette opp initialbetingelser og ei løkke for den numeriske integrasjonen. (6 poeng)

Oppgave 5 Regneoppgave: Fange romskip (18 poeng)

To like romskip, A og B , har form som sylindere med lengde L og flyr i motsatte retninger. Den relative hastigheten er v , og den er stor, slik at relativistiske effekter blir viktige. Romskipene passerer tett forbi hverandre. Begger er utstyrt med klaffer i endene som kan slås ut for å prøve å “fange” det andre. Dette går jo vanligvis ikke, men på grunn av lengdekontraksjonen ser begge romskipene at det andre er kortere og derfor tror begge at de skal kunne klare det. Figuren viser situasjonen slik den ser ut for en observatør på romskip A .



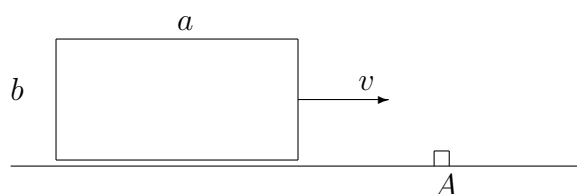
Vi lar referansesystem S følge romskip A , og lar hendelser sett fra S være beskrevet med umerkede koordinater (x, t) , mens referansesystem S' følger romskip B og beskriver de samme hendelsene med merkede koordinater (x', t') . Mannskapene på romskipene har forberedt seg godt, og slår ut begge klaffene på et tidspunkt som de mener er samtidig med at midten av romskipene passerer hverandre (som vi regner som nullpunkt for tiden i begge referansesystemene, $t = t' = 0$). Vi har nå tilsammen fire hendelser: Romskip A slår ut klaffen foran (A_F) og bak (A_B) og tilsvarende for romskip B (B_F og B_B). I referansesystem S har vi $t_{A_F} = t_{A_B} = 0$, $x_{A_F} = -L/2$ og $x_{A_B} = L/2$.

- Hva er koordinatene til de samme hendelsene beskrevet i system S' ? (4 poeng)

- (b) Finn koordinatene til B_F og B_B i begge referansesystemene.
(4 poeng)
- (c) Beskriv hendelsesforløpet slik det blir observert fra de to observatørene, og forklar hvordan begge kan hevde at de fanget det andre romskipet, og samtidig hevde at det andre ikke klarte det. Anta at klaffene er altfor svake til å stoppe et romskip, og at de bare knekker hvis de blir truffet.
(6 poeng)
- (d) Tegn et Minkowski-diagram (romtidsdiagram) som viser hendelsesforløpet. Merk spesielt av de fire hendelsene A_F , A_B , B_F og B_B .
(4 poeng)

Oppgave 6 Regneoppgave: En kloss som kolliderer (16 poeng)

En rektangulær, homogen kloss med lengde a og høyde b og med masse M glir med hastighet v bortover et horisontalt underlag. Hjørnet nede til høyre på klossen hefter seg fast i en liten forhøyning A i underlaget slik at klossen begynner å rotere om denne sidekanten (du kan regne forhøyningen som uendelig liten).



- (a) Vis at treghetsmomentet til klossen om en akse som går gjennom massesenteret og som står vinkelrett “på papiret” er gitt ved

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).$$

- (4 poeng)
- (b) Finn vinkelhastigheten umiddelbart etter at dreiningen begynner.
(4 poeng)
- (c) Påvis at den kinetiske energien umiddelbart etter støtet er mindre enn umiddelbart før.
(4 poeng)
- (d) Hva er den største farten v klossen kan ha før støtet uten at den tipper over på høykant i den etterfølgende bevegelsen?
(4 poeng)

Eksamenssett slutt.

Formelark FYS-MEK 1110

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{hvor} \quad \vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{og} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\text{Konstant } \vec{a}: \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\text{Konstant } \alpha: \quad \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Baneakselerasjon:} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$$

$$\text{Rotasjon:} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\text{Galilei-transformasjon, referansesystemer:} \quad \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

$$\text{Fjærkraft:} \quad F(x) = -k(x - x_0), \quad \text{luftmotstand: } \vec{F}_v = -k\vec{v} \quad \text{eller} \quad \vec{F}_v = -D|\vec{v}|\vec{v}$$

$$\text{Statisk friksjon:} \quad |\vec{F}_s| \leq \mu_s N, \quad \text{dynamisk friksjon:} \quad |\vec{F}_d| = \mu_d N$$

$$\text{Arbeid:} \quad W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A, \quad \text{kinetisk energi:} \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Potensiell energi for gravitasjon:} \quad U = mgy, \quad \text{for fjærkraft:} \quad U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$\text{Konservativ kraft:} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

$$\text{Impuls:} \quad \vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$$

$$\text{Rakettligningen:} \quad \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m\vec{a}$$

$$\text{Massesenter:} \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm, \quad M = \sum_i m_i = \int_M dm$$

$$\text{Kraftmoment:} \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{spinn:} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\text{Spinnsats:} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \text{stive legemer:} \quad L_z = I_z \omega_z, \quad \tau_z = I_z \alpha_z$$

$$\text{Kinetisk rotasjonsenergi:} \quad K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad \text{treghetsmoment:} \quad I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$$

$$\text{Parallellaksesteoremet:} \quad I = I_{cm} + Md^2$$

$$\text{Rullebetingelse:} \quad V = \omega R$$

$$\text{Fiktive krefter:} \quad m\vec{a}' = \Sigma F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\vec{a} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\text{Gravitasjon:} \quad \vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r, \quad U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}; \quad G \text{ er gravitasjonskonstanten}$$

$$\text{Spenning og tøyning:} \quad \sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E \frac{\Delta x}{x} = E \epsilon_{xx}, \quad \frac{\Delta y}{y} = -\nu \frac{\Delta x}{x}$$

$$\text{Lorentz-transformasjon:} \quad x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\text{Lorentz-transformasjon for hastighet:} \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$