

# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

## Løsningsforslag (ACL)

**Utsatt, skriftlig eksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022**

**Dato:** Torsdag 18. august 2022, kl. 15:00-19:00 (4 timer)

**Oppgavesettet er på:** 5 sider (formelark bakerst på side 6).

**Tillatte hjelpemidler:** Øgrim og Lian: "Størrelser og enheter i fysikk og teknikk" eller Angell, Lian, Øgrim: "Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler"

Rottmann: "Matematisk formelsamling" Elektronisk kalkulator av godkjent type.

*Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!*

**Lykke til!**

### Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)

Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

**1.1** En nettokraft  $\vec{F}_{net} \neq \vec{0}$  virker på et legeme med masse  $m$ . Hvilken av påstandene under er riktig? Husk å begrunne svaret.

- (a) Farten til legemet kan være konstant.
- (b) Hastigheten til legemet kan være konstant.
- (c) Verken farten eller hastigheten til legemet kan være konstant.
- (d) Akselerasjonen til legemet kan være null.

(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Siden  $\vec{F} = m\vec{a} \neq \vec{0}$ , kan akselerasjonen ikke være null, og hastigheten kan ikke være konstant. Men farten  $v$  kan være konstant; f.eks. bevegelse på en sirkelbane med konstant fart men hvor retningen på hastigheten hele tiden endres. Svar (a) er riktig.

**1.2** To klosser er presset sammen med en fjær i mellom, men uten at klossene er festet i fjæren. Systemet bestående av de to klossene og fjæren slippes så fri på et horisontalt bord uten friksjon (se figur). Mens de to legemene fjerner seg fra hverandre og fra fjæren:

- (a) er bare bevegelsesmengden i systemet bevart.
- (b) er bare den mekaniske energien i systemet bevart.
- (c) er både den mekaniske energien og bevegelsesmengden til systemet bevart.
- (d) er den kinetiske energien til systemet bevart.

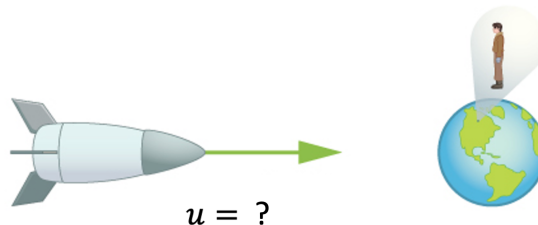


(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Siden det ikke er friksjon, er det ingen ytre krefter som på systemet i horisontal retning (kraften fra fjæren er en indre kraft), derfor er bevegelsesmengde bevart. Fjærkraften er en konservativ kraft, potensiell energi fra fjæren omdannes til kinetisk energi til klossene uten tap av mekanisk energi. Svar (c) er riktig.

**1.3** En rakett beveger seg med en veldig stor hastighet  $u$  relativt til Jorda, slik at tiden i raketten bare går halvparten så raskt som tiden for en observatør på Jorda. Relativhastigheten  $u$  til raketten er

- (a)  $u = \frac{1}{2}c$
- (b)  $u = \frac{3}{2}c$
- (c)  $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$
- (d)  $u = \frac{\sqrt{2}}{3}c$
- (e)  $u = \sqrt{2}c$



(3 poeng)

**Løsningsforslag:** En observatør på Jorda er i ro, og måler et tidsintervall  $\Delta t_0$ . En observatør i raketten måler et tidsintervall  $\Delta t$  som er dobbelt så langt som  $\Delta t_0$ :

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

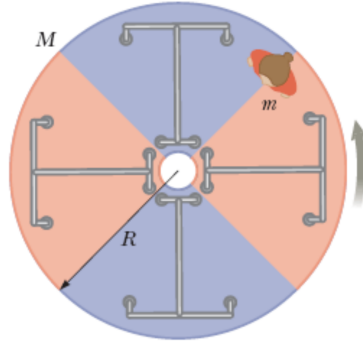
hvor  $u$  er hastigheten til raketten relativt til Jorda. Siden tiden i raketten går 2 ganger så langsomt som på Jorda, får vi at

$$\Delta t = 2\Delta t_0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\Delta t_0}{2\Delta t} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$\frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

**1.4** Et barn står på en karusell som roterer uten friksjon. Barnet går sakte mot karusellens senter. Hvordan endrer spinnet til hele systemet seg (barn + karusell) mens barnet beveger seg innover?

- (a) Spinnet øker.
- (b) Spinnet minker.
- (c) Spinnet er konstant.



(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Friksjonen mellom barnet og karusellen er en indre kraft. Det er ingen ytre krefter som gir et kraftmoment på systemet barn + karusell, og spinnet er derfor bevart. Svar (c) er riktig.

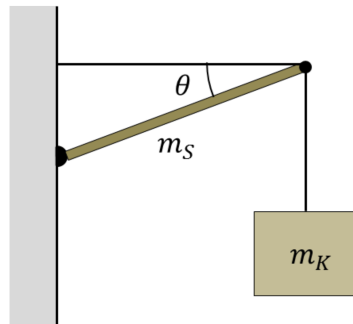
### Oppgave 2 Tekstoppgave: Referansesystemer og fiktive krefter (6 poeng)

En edderkopp går på et skjenebrett (Frisbee-skive), som noen kaster gjennom luften om bord et skip, som ruller og stamper i tung sjø på jorden, som roterer om sin akse på veien rundt solen, som befinner seg ut i en spiralarm til melkeveien, som roterer om et svart hull i sentrum av galaksen, som akselererer gjennom universet. Diskuter mulige referansesystemer for disse situasjonene. Hvilke av dem er inertialsystemer? Vil tiden som bevegelsen tar ha noe å si for valg av referansesystemet?

**Løsningsforslag:** Dette var diskusjonsoppgave D1 ukesett 12. Hvis vi først ser på skiven som roterer, er den ikke et inertialsystem nettopp fordi den roterer. Et legeme som beveger seg på skiven vil føle Corioliskraften og sentrifugalkraften. Skipet beveger seg opp og ned og til side i en bevegelse med komplisert akselerasjon mellom bølgedaler og bølgetopper. Det oppstår fiktive krefter på grunn av denne akselerasjonen. Jorden roterer jevnt om sin akse og i tillegg rundt solen, og er derfor heller ikke et inertialsystem. Solsystemet vårt med solen i sentrum, roterer også rundt galaksens sentrum. Denne bevegelsen er ikke rask og har liten konsekvens for edderkoppen, men strengt tatt er det ikke et inertialsystem heller. Men for alle bevegelser kan vi finne et system som er *nesten* et inertialsystem. Hvis vi for eksempel skal beskrive bevegelsen til pendelen i Fysikkbygningens vestibyle over en periode på 30 sekunder, kan vi bruke vestibylen som referansesystem. Hvis vi skal beskrive bevelsen over 30 timer så kan vi ikke se bort fra jordens rotasjon.

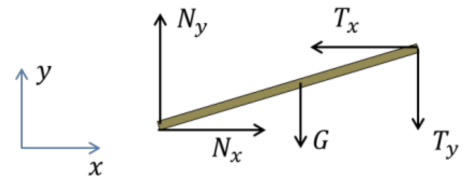
### Oppgave 3 Regneoppgave: En kiste i ei snor (13 poeng)

En kiste med masse  $m_k$  henger i ei masseløs snor over en homogen støttestav med masse  $m_s$  som vist i figuren. Vinkelen mellom staven og horisontalen er  $\theta$ . Tyngdeakselerasjonen er  $g$ .



- (a) Tegn et frilegemediagram til staven og navngi alle krefter.  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Krefter på støttestaven: snordrag  $\vec{T}$  (komponenter  $T_x, T_y$ ); gravitasjon



$\vec{G}$ ; normalkraft fra veggen  $\vec{N}$  (komponenter  $N_x, N_y$ ).

- (b) Finn snordraget i både den vertikale og horisontale delen av snoren.  
(5 poeng)

**Løsningsforslag:** Dette er et statisk tilfelle, summen av alle kreftene må være null siden systemet er i ro. Newtons 2.lov i  $y$ -retning for *kisten* gir at størrelsen på  $T_y$  er gitt ved

$$T_y = m_k g,$$

dvs. like stor men motsatt rettet av tyngdekraften på kisten som henger i snora. Så må også summen av kraftmomentene om et hvilket som helst punkt være null. Vi kaller lengden på staven for  $L_s$ . Vi ser på kraftmomentene om kontaktpunktet med veggen og får:

$$L_s T_x \sin \theta - L_s T_y \cos \theta - \frac{L_s}{2} \cos \theta m_s g = 0.$$

Vi setter inn for  $T_y$ , deler på  $L_s$  og løser for  $T_x$ :

$$T_x \sin \theta = \frac{1}{2} m_s g \cos \theta + m_k g \cos \theta \Rightarrow T_x = \left( \frac{1}{2} m_s + m_k \right) g \cot \theta.$$

- (c) Finn kraften fra hengselet (som er festet i veggen) på støtten. Uttrykk kraften som en vektor.  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Vi bruker N2L i  $x$ -retning:

$$N_x - T_x = 0 \Rightarrow N_x = T_x = \left( \frac{1}{2}m_s + m_k \right) g \cot \theta.$$

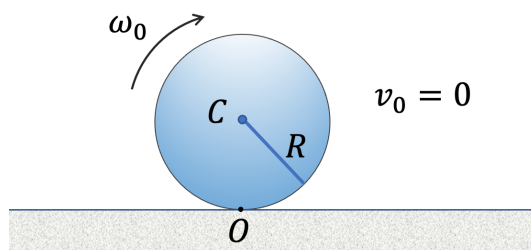
N2L i  $y$ -retning:

$$N_y - G - T_y = 0 \Rightarrow N_y = (m_s + m_k)g.$$

#### Oppgave 4 Regneoppgave: Ei roterende kule (22 poeng)

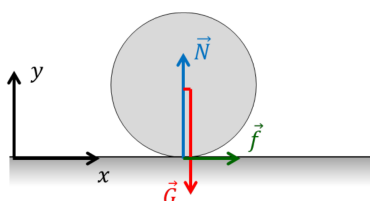
Ei homogen kule med masse  $M$  og radius  $R$  roterer om sitt massesenter  $C$  med vinkelfart  $\omega_0$ . Kulas treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret er  $I_C = \frac{2}{5}MR^2$ . Den roterende kula settes forsiktig ned på et horisontalt underlag, se figur, hvor det første berøringspunktet kalles  $O$ . Massesenterets starthastighet er lik null.

Til å begynne med både ruller og glir kula mot høyre, men etter en tid gjør friksjonen at kula får en rent rullende bevegelse.



- (a) Tegn et frilegemediagram for kula i det den kommer i kontakt med underlaget i punktet  $O$ . Husk å navngi alle krefter.  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Gravitasjon  $\vec{G}$ , normalkraft  $\vec{N}$ , dynamisk friksjonskraft  $\vec{f}$  i positiv  $x$ -retning (det er denne kraften som akselererer massesenteret fra  $v_0 = 0$  til en fart  $v_0$ ).



- (b) Hva er kulas spinn  $L_O$  om punktet  $O$  umiddelbart før den berører underlaget?  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Rett før kula kommer i kontakt med underlaget har massesenteret ikke noe hastighet i forhold til kontaktpunktet, så lineærspinn er null. Men kula roterer om sitt massesenter, så totalspinnet blir

$$L_O = I_C \omega_0 = \frac{2}{5} M R^2 \omega_0.$$

- (c) Bruk spinnsatsen om  $O$  til å vise at kulas vinkelfart når kula har gått over i en ren rullebevegelse er

$$\omega = \frac{2}{7} \omega_0.$$

(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Vi må se om det er noen av kreftene som gir et kraftmoment om kontaktpunktet  $O$ . Normalkraften har parallell kraftarm med kraften, og gravitasjonen har antiparallell kraftarm med kraften, så de gir ikke noe kraftmoment om  $O$ . Friksjonen angriper i kontaktpunktet, og har da kraftarm med null lengde, og dermed heller ikke noe kraftmoment. Spinn er derfor bevart:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}.$$

Spinnet rett før kontakt med overflaten fant vi i forrige oppgave. Spinnet om kontaktpunktet når kula ruller uten å skli (dvs. vi har  $v = \omega R$ ), er gitt ved:

$$\vec{L} = R \hat{\mathbf{j}} \times M v \hat{\mathbf{i}} - I_C \omega \hat{\mathbf{k}}.$$

Ved å bruke rullebetingelsen får vi (ser på størrelsen til spinnet, i negativ  $z$ -retning):

$$L = R M \cdot \omega R + \frac{2}{5} M R^2 \omega = \frac{7}{5} M R^2 \omega.$$

Vi setter dette lik spinnet før kontakt og får:

$$\frac{2}{5} M R^2 \omega_0 = \frac{7}{5} M R^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{2}{7} \omega_0.$$

- (d) Finn avstanden  $d$  som kulas massesenter har beveget seg før kula har gått over i en ren rullebevegelse. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er  $\mu_d$ .  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Den eneste kraften som virker i bevegelsesretning (i positiv  $x$ -retning) er den dynamiske friksjonskraften, som er konstant og størrelsen er gitt ved  $f = \mu_d N$ . Fra Newtons 2. lov i  $y$ -retning får vi at  $N = Mg$ , og dermed  $f = \mu_d Mg$ . Med konstant kraft får vi konstant akselerasjon, og vi kan derfor bruke bevegelsesligningen for konstant akselerasjon:

$$v^2 - v_0^2 = 2ad.$$

Med  $v_0 = 0$  og  $v = \omega R$  (når kula oppfyller rullebetingelsen) får vi:

$$v^2 = 2\mu_d g d \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu_d g} = \frac{\omega^2 R^2}{2\mu_d g} = \frac{2\omega_0^2 R^2}{49\mu_d g}.$$

- (e) Hva er forandringen i den kinetiske energien til kula over denne avstanden  $d$ ? Forklar kort hvorfor dette ikke er det samme som produktet av friksjonskraften og veilengden  $d$ . (6 poeng)

**Løsningsforslag:** I starten har kula ikke noe lineærhastighet, så kinetisk energi før er

$$K_0 = \frac{1}{2} I_C \omega_0^2.$$

Etter at kula har oppnådd rullebetingelsen, har kula både rotasjons- og translatorisk kinetisk energi:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \left( \frac{2}{7} \omega_0 \right)^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{2}{7} \omega_0 \right)^2 R^2 = \frac{4}{70} \omega_0^2 M R^2.$$

Vi regner ut forskjellen og finner:

$$K_1 - K_0 = \frac{4}{70} \omega_0^2 M R^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \omega_0^2 = \left( \frac{4}{70} - \frac{1}{5} \right) M R^2 \omega_0^2 = -\frac{1}{7} M R^2 \omega_0^2,$$

altså tap av kinetisk energi, som forventet siden dynamisk friksjon er en ikke-konservativ kraft. Dette er *ikke* det samme som produktet av friksjonskraften og veilengden  $d$ , fordi kula både ruller og sklir over avstanden  $d$ . Så for å få riktig svar må man regne ut avstanden som kula ruller, og trekke dette fra avstanden  $d$ , og så ta denne (kortere) avstanden og gange med friksjonskraften for å få samme svar som over.

### Oppgave 5 Et ion i et potensial (28 poeng)

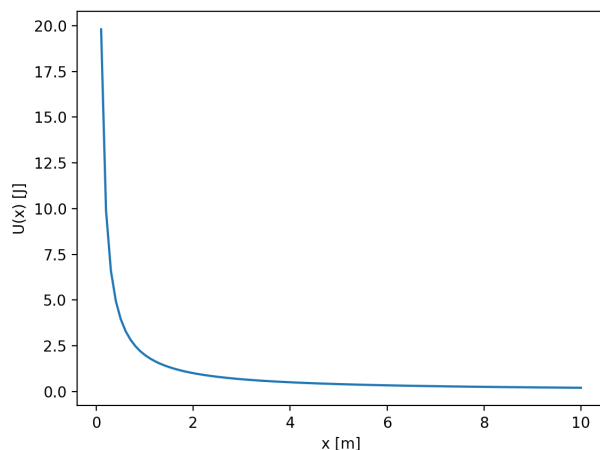
Et lite ion med masse  $m$  beveger seg mot et stort molekyl som er så massivt at det forblir i ro under hele prosessen. Vi velger massesenteret til molekylet som origo i vårt koordinatsystem. I det endimensjonale tilfellet beveger ionet seg langs  $x$ -aksen og vekselvirkningen mellom ionet og molekylet kan beskrives ved det en-dimensjonale potensialet

$$U(x) = \frac{B}{x},$$

der  $B$  er en positiv konstant. Ionet starter ved posisjonen  $x = x_0$  med hastighet  $\vec{v}_0$ , hvor  $x_0 > 0$  og  $\vec{v}_0 = -v_0 \hat{\mathbf{i}}$ . Du kan neglisjere alle andre krefter som virker på ionet.

- (a) Skissér potensialet og beskriv bevegelsen til ionet.  
(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Ionet får potensiell energi når det nærmer seg molekylet. Siden kraften er konservativ, er mekanisk energi bevart. Dermed minker den kinetiske energien, og tilslutt stopper ionet helt opp og hastigheten bytter retning. Etter det akselereres ionet vekk fra molekylet.



- (b) Finn kraften fra molekylet som virker på ionet. Finnes det noen likevektspunkter? I så fall, for hvilke(n)  $x$  finnes de(n)?  
(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Vi finner kraften ved å derivere potensialet:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{B}{x^2}.$$

Det finnes ingen likevektspunkter siden  $U(x) \rightarrow 0$  bare for  $x \rightarrow \infty$

- (c) Hva er den kortest mulige avstanden mellom ionet og molekylet?  
(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Vi bruker bevaring av mekanisk energi. Ved den minste avstanden  $x_1$  har ionet stoppet opp:

$$E_{tot} = K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

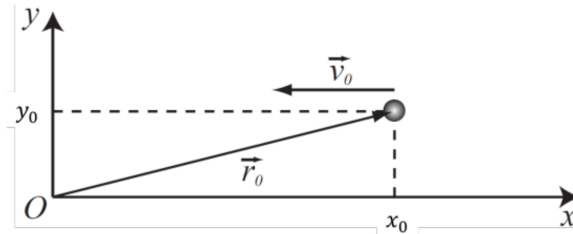
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{B}{x_0} = 0 + \frac{B}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{B}{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{B}{x_0}}.$$

- (d) Hva er hastigheten til ionet etter en lang tid etter kollisjonen med molekylet?  
(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Etter en lang tid har ikke ionet noe potensiell energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{B}{x_0} = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2B}{mx_0}}.$$

Vi ser nå på samme prosess i to dimensjoner. Ionet starter i posisjon  $\vec{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}}$  med hastighet  $\vec{v}_0 = -v_0\hat{\mathbf{i}}$ , der  $x_0 > y_0$  (se figur).



Den potensielle energien til ionet beskrives nå ved

$$U(\vec{r}) = \frac{B}{r},$$

der  $B > 0$  og  $r = |\vec{r}|$ . Igjen kan du neglisjere alle andre vekselvirkninger.

- (e) Vis at kraften på ionet er gitt som

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{B}{r^3}\vec{r}.$$

(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Potensialet har en sfærisk symmetri og gradienten har derfor ingen vinkelavhengighet. Vi får (med  $\hat{u}_r = \vec{r}/r$ ):

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r} [U(\vec{r})] \hat{u}_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{B}{r} \right] \hat{u}_r = \frac{B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{B}{r^3} \vec{r}.$$

- (f) Skissér en kode for å finne posisjonen og hastigheten til ionet som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å sette opp initialbetingelsene og integrasjonsløkka.  
(6 poeng)

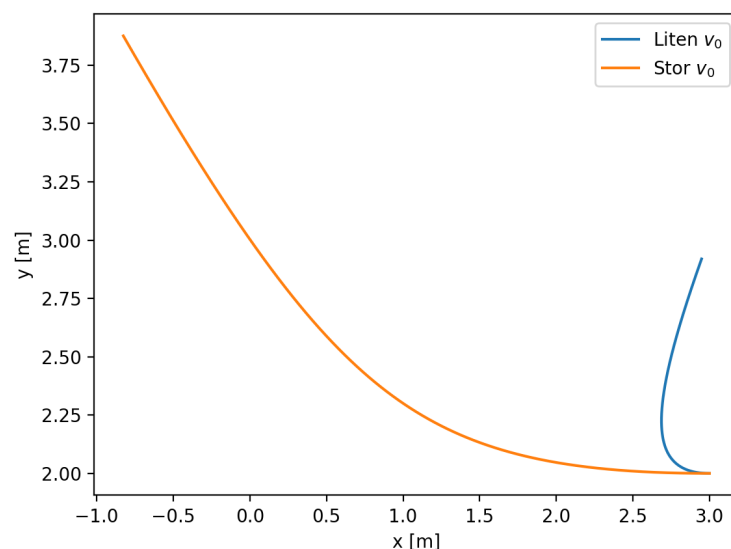
**Løsningsforslag:** I Python-ish stil. Det er ingen føringer på valg av programmeringsspråk.

```
# Startverdier.
# Gitt i teksten for startposisjonen,
# starthastigheten vet vi bare er i negativ x-retn.
x_0 = 3.          # [m]
y_0 = 2.          # [m]
v_x0 = -1.        # [m/s]
v_y0 = 0.         # [m/s]
r[0, :] = [x_0, y_0]
v[0, :] = [v_x0, v_y0]

# Euler-Cromer
for i in range(n-1):
    rnorm3 = pow(np.linalg.norm(r[i, :]), 3)
    F = (B/rnorm3)*r[i, :]
    a = F/m
    v[i+1, :] = v[i, :] + a*dt
    r[i+1, :] = r[i, :] + v[i+1, :]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt
```

- (g) Skissér banen til ionet som starter fra samme posisjon,  $x_0 = 3\text{m}$  og  $y_0 = 1\text{m}$ , men med henholdsvis liten og stor fart.  
(4 poeng)

**Løsningsforslag:** Med høy starthastighet kommer ionet nærmere molekylet (som ligger i origo) før det bøyes av, se figur.



- (h) Hvordan vil bevegelsen forandre seg dersom konstanten  $B$  er negativ,  $B < 0$ ?  
(3 poeng)

**Løsningsforslag:** Dersom  $B < 0$ , blir potensialet attraktivt, og ionet akselereres mot molekylet (som en komet som akselereres mot sola). Det avhenger av initialbetingelsen hva slags bane ionet vil få: lukket sirkelbane eller ellipse, eller deflekteres (ved høy initialhastighet) og ionet beveger seg vekk fra ionet.

---

Eksamenssett slutt.