

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag

(ACL & JB, 31.05.2022, tilleggskommentarer ACL 06.06.2022)

Skriftlig eksamen i FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022

Dato: Fredag 3. juni 2022, kl 15:00-19:00 (4 timer)

Oppgavesettet er på: 5 sider (formelark bakerst på side 6).

Tillatte hjelpemidler: Øgrim og Lian: “Størrelser og enheter i fysikk og teknikk” eller Angell, Lian, Øgrim: “Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler”

Rottmann: “Matematisk formelsamling” Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene. Husk at alle svar må begrunnes!

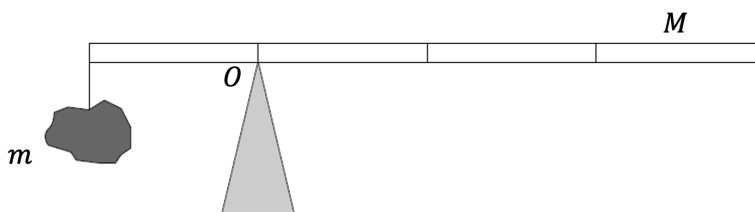
Lykke til!

Oppgave 1 Flervalgsoppgaver (12 poeng)

Her ber vi deg om å velge det svaret du mener er riktig, og at du forklarer *hvorfor* det valgte svaret er riktig. Du får 1 poeng for riktig svaralternativ og 2 poeng for riktig forklaring.

1.1 En stein med masse m henger i en masseløs snor fra enden av en homogen, tynn stokk med lengde d . Stokken balanserer på en støtte, og avstanden mellom der snora er festet og punktet O der stokken hviler på støtten, er $\frac{1}{4}d$. Hele systemet er i likevekt (i ro). Hva er massen M til stokken?

- (a) $\frac{1}{4}m$
- (b) $\frac{1}{2}m$
- (c) m
- (d) $2m$
- (e) $4m$



(3 poeng)

Her trenger man egentlig ikke regne. Man kan godt argumentere med symmetri: siden stokken balanserer på støtten og steinen henger ytterst på enden som er $d/4$ unna balansepunktet (til venstre for kontaktpunktet mellom støtten og stokken), må det være akkurat tilsvarende tyngdekraft på stokken for å kompensere. Siden stokken er homogen, er massesenteret midt i stokken, som er i avstand $d/4$ til høyre for kontaktpunktet med støtten. Dermed må massen til stokken være den samme som massen til steinen, svar c er riktig.

Vi kan også regne på dette og bruke det vi har lært om kraftmoment og likevekt. Om punktet O har vi to kraftmoment forskjellig fra null: ett fra tyngdekraften på steinen, τ_{stein} , som vil dreie stokken “mot klokka”, og ett fra tyngdekraften på massesenteret til stokken, τ_{stokk} , som vil dreie den “med klokka”. De to må være like store for at stokken skal være i ro. Størrelsen på kraftarmen til tyngdekraften på steinen er $d/4$, og det er samme kraftarm til massesenteret til stokken (det er oppgitt i oppgaven at stokken er homogen, så massesenteret ligger midt i

stokken). Vi har:

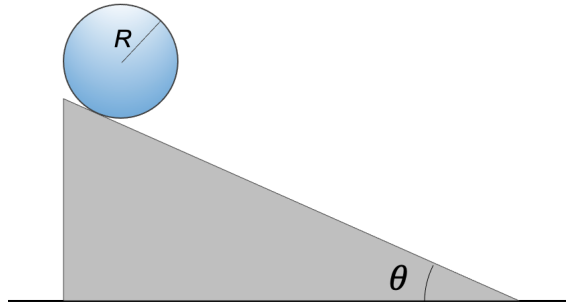
$$\tau_{\text{stein}} = \frac{mgd}{4},$$

$$\tau_{\text{stokk}} = \frac{Mgd}{4}.$$

Siden de må være like, får vi at $M = m$. Svar c er riktig.

1.2 En brusboks formet som en sylinder med masse m og radius R ruller uten å skli ned et skråplan med helningsvinkel θ . Lengden på skråplanet er b , og den statiske friksjonskoeffisienten er μ_s . Arbeidet som friksjonskraften gjør på brusboksen er

- (a) $W_f = -\mu_s mgb \cos \theta$
- (b) $W_f = \mu_s mgb \cos \theta$
- (c) $W_f = -\mu_s mg \sin \theta$
- (d) $W_f = 0$
- (e) $W_f = \mu_s mgb$

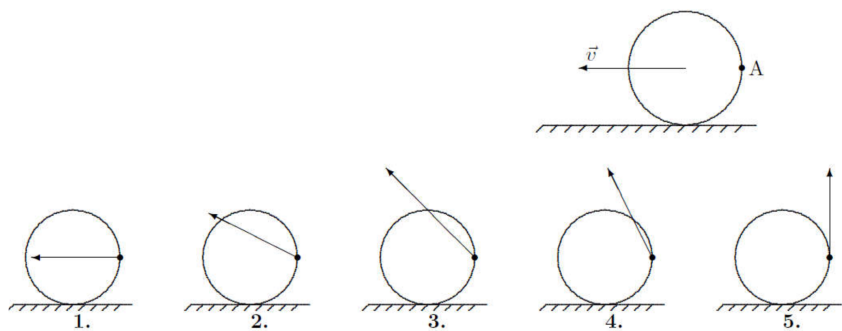


(3 poeng)

Her trengs ingen utregning. Det står i oppgaven at brusboksen ruller uten å skli, dvs. rullebetingelsen er oppfylt. Da må det være statisk friksjon, som ikke gjør noe arbeid (kontaktpunktet med skråplanet er momentant i ro). Svar d er riktig.

1.3 Et hjul med radius R ruller uten å skli på et flatt underlag. Massesenteret beveger seg mot venstre med hastighet $\vec{v}$. Hvilken av figurene viser riktig hastighetsvektor til punktet A på hjulet?

- (a) Figur 1
- (b) Figur 2
- (c) Figur 3
- (d) Figur 4
- (e) Figur 5



(3 poeng)

Vi må se på summen av hastighetsvektor til massesenteret og hastighetsvektor til punktet A som følge av rotasjonen. Hastighetsvektor som følge av rotasjonen er alltid tangentiell på sirkelbanen som punkt A befinner seg på i rotasjonsbevegelsen til hjulet. Siden hjulet ruller uten å skli, er rullebetingelsen oppfylt og vi vet at størrelsen på den tangentielle delen av hastighetsvektor er lik farten til massesenteret ($v = \omega R$). Dermed er svar c riktig (figur 3).

1.4 Du måler vekten til en masse i Oslo. Så tar du med deg både vekten og massen til et sted ved ekvator, og måler på nytt. Verdien vekten viser i Oslo er

- (a) mindre enn ved ekvator
- (b) den samme som ved ekvator
- (c) større enn ved ekvator

(3 poeng)

Denne oppgaven har elementer fra “Test deg selv”-oppgave T1 (spesielt T1b) og T2, ukesett 12 (25.-29.4.2022). Her er det to forklaringer som begge er helt fine, den første går på å bruke sentrifugalakselerasjon som i T1- og T2-oppgaven, den andre er dersom noen har hørt/lest om at tyngdeakselerasjonen ikke er den samme overalt på jorda, fordi jorda er flatttrykt ved polene og buler ut ved ekvator (som følge av rotasjonen).

(i) Fra det vi har lært om fiktive krefter kan vi se på sentrifugalkraften, som avhenger av avstanden fra rotasjonsaksen. Sentrifugalkraften vil peke “ut i verdensrommet” (i radiell retning), og er større ved ekvator enn i Oslo, siden avstanden fra Jordas rotasjonsakse er større ved ekvator. Sentrifugalkraften virker i omtrent motsatt retning av tyngdekraften, så normalkraften (som vekta måler) er mindre ved ekvator enn i Oslo, og dermed er svar c riktig.

(ii) Alternativ forklaring (som gir like mye uttelling): jorda er ikke perfekt kuleformet, den er flatttrykt ved polene (som følge av dens rotasjon), og gravitasjonskonstanten g varierer med hvor man er på jorda. Denne “effektive” g^* er størst ved polene og minst ved ekvator ($g^* = 9.8321 \text{ m/s}^2$ ved Nordpolen og $g^* = 9.7799 \text{ m/s}^2$ ved ekvator). Den effektive g^* er egentlig gitt av en kombinasjon av sentrifugalakselerasjonen og det at jorda ikke er en perfekt kule. Det er helt okay å forklare at svar c er riktig med at g varierer med hvor man er på jorda.

Oppgave 2 Tekstoppgave: En liten og en stor bil kolliderer (6 poeng)

En liten og en stor bil kolliderer med hverandre.

- (a) Hvilken av de to får størst endring i bevegelsesmengde: den store, den lille, eller er endringen i bevegelsesmengden den samme for begge? Bruk impuls i din argumentasjon.
(3 poeng)
- (b) Basert på svaret i a-oppgaven, hvorfor er det større fare for at passasjerene i den lille bilen blir skadet enn passasjerene i den store bilen?
(3 poeng)

Denne oppgaven er identisk med diskusjonsoppgave D1 i ukesett 8 (14.-18.3.2022).

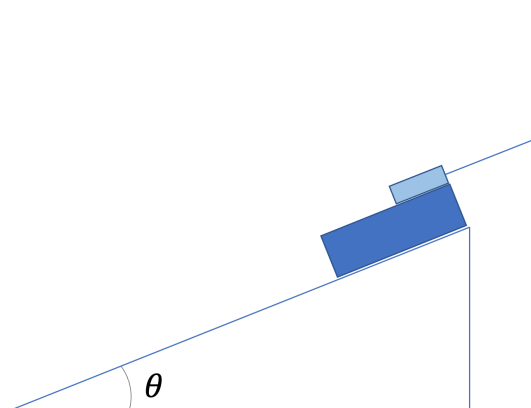
(a) Det virker ingen ytre krefter i horisontal retning. Kreftene som oppstår under kollisjonen mellom bilene er indre krefter. Bevegelsesmengde er derfor bevart i kollisjonen. Hvis bevegelsesmengden øker for en av bilene må den minke for den andre. Impulsen, altså endringen i bevegelsesmengde Δp , er derfor den samme for begge biler.

(b) Hvis endringen i bevegelsesmengden er den samme for begge biler, så er den lille bilen utsatt for en større endring i hastighet. Passasjerene er derfor utsatt for en større akselerasjon, og derfor er kreftene som virker på passasjerene større.

Oppgave 3 Regneoppgave: To klosser på et skråplan (18 poeng)

To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel θ som vist i figuren. Den øverste klossen med masse m er festet til en vegg med en snor. Den underste klossen med masse M blir holdt på plass

av friksjonskreftene mellom den øvre og den underste klossen, og mellom den underste klossen og skråplanet. Den statiske friksjonskoeffisienten μ_s er den samme for begge kontaktflatene.

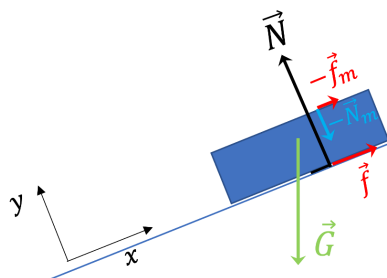
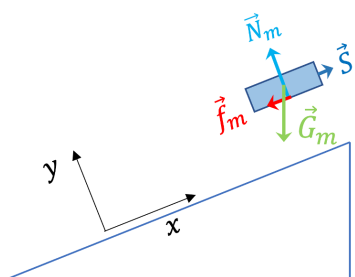


- (a) Tegn to frilegemediagram: ett for den øverste klossen og ett for den nederste klossen. Husk å navngi alle krefter.

(6 poeng)

Den øverste klossen: $\vec{N}_m$: normalkraft fra boka under. $\vec{S}$: snordrag. $\vec{G}_m$ tyngdekraft. $\vec{f}_m$: statisk friksjon mellom de to klossene.

Den nederste klossen: $\vec{N}$: normalkraft fra skråplanet. $\vec{G}$: tyngdekraft. $\vec{f}$: statisk friksjon mellom skråplanet og den nederste klossen. $-\vec{f}_m$: friksjon mellom de to klossene, motkraft til $\vec{f}_m$. $-\vec{N}_m$: normalkraft fra den øverste på den nederste boka, motkraft til $\vec{N}_m$. Merk at vi ser bort fra gravitasjon mellom klossene, siden de har veldig liten masse i forhold til jorda.



- (b) Vi øker nå helningsvinkelen θ til skråplanet, helt til den underste klossen begynner å gli. Vis at den kritiske helningsvinkelen θ_{max} idet den underste klossen begynner å gli er gitt ved

$$\tan \theta_{max} = \frac{\mu_s(2m + M)}{M}.$$

(4 poeng)

Kommentar ACL (06.06.2022): Her har alle som har sett på oppgaven på forhånd, tolket oppgaven slik at snora alltid er parallell med skråplanet, dvs. at vinkelen mellom horisontalen og snora er den samme som vinkelen til skråplanet slik som i figuren i oppgaven. En

annen mulig tolkning av oppgaven er at snora ikke danner samme vinkel med horisontalen som vinkelen til skråplanet. Da må snordraget dekomponeres og det blir et annet (mer komplisert) uttrykk. Om noen har tolket oppgaven slik, skal det gis mye uttelling for det. Vi bruker Newtons 2. lov først på den øverste klossen for å bestemme størrelsen til N_m :

$$N_m - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N_m = mg \cos \theta.$$

Siden vi nå skal ha at vinkelen skal være akkurat så stor at den underste klossen begynner å skli, må vi ha maksimal, statisk friksjon:

$$f_m = \mu_s mg \cos \theta_{max}$$

Så bruker vi N2L på den nederste klossen i y-retning, og setter inn for størrelsen til N_m :

$$N - N_m - Mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = (M + m)g \cos \theta.$$

Igjen skal vi ha den maksimale, statiske friksjonskraften:

$$f = \mu_s (M + m)g \cos \theta_{max}.$$

Da har vi alt vi trenger for å bruke Newtons 2. lov i x-retning for den underste klossen, for å finne θ_{max} :

$$f_m + f - Mg \sin \theta_{max} = 0$$

$$\mu_s mg \cos \theta_{max} + \mu_s (M + m)g \cos \theta_{max} - Mg \sin \theta_{max} = 0$$

Vi deler på $\cos \theta_{max}$ og får:

$$\mu_s mg + \mu_s (M + m)g - Mg \tan \theta_{max} = 0 \Rightarrow \tan \theta_{max} = \frac{\mu_s (2m + M)}{M}.$$

- (c) Finn snorkraften på den øverste klossen uttrykt ved θ_{max} , m , M , μ_s , og g .
(2 poeng)

Vi bruker Newtons 2. lov på den øverste klossen i x-retning:

$$S - f_m - mg \sin \theta = 0$$

Med maksimal, statisk friksjon får vi:

$$S = \mu_s mg \cos \theta_{max} + mg \sin \theta_{max} = mg(\mu_s \cos \theta_{max} + \sin \theta_{max}).$$

Med massen M :

$$f_m = Mg \sin \theta_{max} - f$$

$$S = f_m + mg \sin \theta_{max} = Mg \sin \theta_{max} - \mu_s (M + m)g \cos \theta_{max} + mg \sin \theta_{max}$$

- (d) Ved θ_{max} , så vil den underste klossen gli en lengde d ned skråplanet. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom skråplanet og den underste klossen er μ_d . Vi antar at den øverste klossen er veldig liten i utstrekning, slik at vi kan se bort fra arbeidet gjort av den dynamiske friksjonskraften mellom de to klossene. Vi ser også bort fra luftmotstand. Finn farten til den nederste klossen når den har sklidd ned skråplanet.

(6 poeng)

Denne oppgaven er så å si identisk med eksempelet “En bok på et skråplan” fra forelesning nr. 13 den 01.03.2022.

Det er oppgitt i oppgaven at vi slipper å se på bidraget til arbeidet gjort av den dynamiske friksjonskraften mellom klossene. Dermed blir dette helt likt som et system kun av den nederste klossen. Det er kun kreftene som virker i x-retning (parallelt med skråplanets helning) på den nederste klossen som bidrar til arbeidet, siden arbeidet er gitt som $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt$. Vi sitter igjen med den dynamiske friksjonskraften f_d mellom den nederste klossen og skråplanet, og x-komponenten av gravitasjonen, $Mg \sin \theta_{max}$. Den dynamiske friksjonskraften virker *mot* bevegelsesretning (motsatt retning av $\vec{v}$) og gjør derfor et negativt arbeid, mens x-komponenten av gravitasjonen virker *i samme retning* som $\vec{v}$ og gjør et positivt arbeid på den nederste klossen. Begge disse kreftene er konstanter ($f_d = \mu_d N = \mu_d Mg \cos \theta_{max}$), så vi kan integrere over strekningen de virker over for å finne arbeidet:

$$W_{0,1} = \int_0^d (Mg \sin \theta_{max} - \mu_d Mg \cos \theta_{max}) dx = Mgd(\sin \theta_{max} - \mu_d \cos \theta_{max}).$$

Vi bruker arbeid-energi-teoremet på den nederste klossen, med initialbetingelse at farten er null ved $t_0 = 0s$, $v_0 = 0$ m/s:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2} M v_1^2 \Rightarrow Mgd(\sin \theta_{max} - \mu_d \cos \theta_{max}) = \frac{1}{2} M v_1^2$$

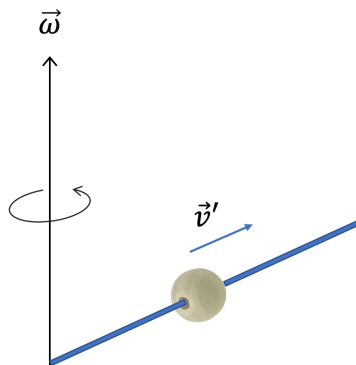
Vi deler på M på begge sider og løser for v_1 :

$$v_1^2 = 2gd(\sin \theta_{max} - \mu_d \cos \theta_{max}) \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd(\sin \theta_{max} - \mu_d \cos \theta_{max})}.$$

Det bes kun om farten i oppgaven, retningen er i negativ x-retning slik vi har valgt koordinatsystemet.

Oppgave 4 Regne- og numerisk oppgave: En treperle på en stang (12 poeng)

Det er montert en treperle med hull i midten på en tynn, horisontal stang som roterer, se figur. Stangen roterer med en konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}$ om en vertikal akse gjennom den ene enden av stangen. Vi lar S' være referansesystemet som følger stangens rotasjon (med origo i aksen som stangen roterer om), slik at stangen er i ro i dette systemet. Perlen glir utover stangen med konstant fart v' i system S' , og starter i avstand r'_0 (større enn null) fra rotasjonsaksen. Vi ser bort fra luftmotstand, og vi antar at perlen glir tilnærmet friksjonsfritt på stangen.



- (a) Sett opp uttrykket for akselerasjonen $\vec{a}$ [for treperlen] i et inertialsystem S som er i ro, og som har origo samme sted som S' . Forklar de ulike leddene i uttrykket for akselerasjonen, og hvilke fysiske størrelser de avhenger av.

(4 poeng)

Det generelle uttrykket for Newtons 2. lov (og dermed akselerasjonen) i et akselerert referansesystem er gitt i formelarket (fiktive krefter):

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}^{ext} - m\vec{A} - m\vec{a} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

Fra Newtons 2. lov i et inertialsystem: $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$, denne akselerasjonen $\vec{a}$ skal vi finne. Vi vet fra oppgaveteksten at i system S' så glir perlen med konstant fart v' , altså må akselerasjonen i system S' være null: $\vec{a}' = \vec{0}$. Videre har ikke system S og S' noen lineærakselerasjon i forhold til hverandre, så $\vec{A} = \vec{0}$. Det er oppgitt i oppgaven at vinkelhastigheten er konstant, og derfor er $\vec{\alpha} = \vec{0}$ også. Dermed sitter vi igjen med:

$$\vec{0} = m\vec{a} - \vec{0} - \vec{0} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\vec{a}_c - \vec{a}_s.$$

Det første leddet på høyre side av ligningen avhenger av hastigheten $\vec{v}'$ i det akselererte referansesystemet S' (i system S' er det Coriolis-akselerasjonen). Det andre leddet avhenger av avstanden $\vec{r}'$ fra rotasjonsaksen i i det akselererte referansesystemet S' (i system S' tilsvarende dette sentrifugalakselerasjonen).

- (b) Vis at de to komponentene til akselerasjonen $\vec{a}$ har størrelse $a_s = \omega^2 r'$ og $a_c = 2\omega v'$.

(2 poeng)

Vi kan løse dette ved å finne størrelsen til sentrifugal- og Coriolisakselerasjonen i system S' :

$$a_s = |-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')|$$

Vi bruker de merkede enhetsvektorene i system S' , og legger x' -aksen langs stangen, slik at $\vec{r}' = r'\hat{\mathbf{i}}'$, $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}'$ og regner ut kryssproduktene:

$$\vec{a}_s = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\vec{\omega} \times (\omega\hat{\mathbf{k}}' \times r'\hat{\mathbf{i}}') = -\omega\hat{\mathbf{k}}' \times \omega r'\hat{\mathbf{j}}' = \omega^2 r'\hat{\mathbf{i}}'.$$

Størrelsen er da $a_s = \omega^2 r'$.

Tilsvarende for Coriolis-bidraget:

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Vi vet at perlen glir med konstant hastighet $\vec{v}'$, ut i radiell retning langs stangen (samme retning som $\vec{r}'$), så $\vec{v}' = v'\hat{\mathbf{i}}'$ og vi får:

$$\vec{a}_c = -2\omega\hat{\mathbf{k}}' \times v'\hat{\mathbf{i}}' = -2\omega v'\hat{\mathbf{j}}'.$$

Størrelsen er $a_c = 2\omega v'$.

- (c) Skissér en kode som beskriver bevegelsen til treperlen sett fra system S . Her er det tilstrekkelig å sette opp initialbetingelser og ei løkke for den numeriske integrasjonen.

(6 poeng)

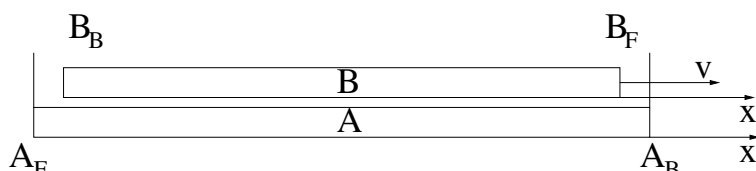
Ved tid t_0 er $r_0 = r'_0$, og for hastigheten så må vi huske på å legge til leddet fra rotasjonen: $\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'_0$.

Kodeskisse i Python-ish stil (vi har ingen føringer på programmeringsspråket). Strengt tatt skal det også være med en transformasjon med enhetsvektorene fra S' til S for $\vec{v}'$ og $\vec{r}'$ for å få riktig $\vec{v}$ og $\vec{r}$ i system S . Her er det kun bedt om en kodeskisse og det gis full uttelling selv om transformasjonen ikke er med.

```
r_prime[0, :] = [x_prime0, y_prime0]
r[0, :] = r_prime[0, :]
v_prime[0, :] = [vx_prime0, vy_prime0]
v[0, :] = v_prime[0, :] + cross(omega, r_prime[0, :])
for i in range(n-1):
    a_s = cross(omega, cross(omega, r_prime[i, :]))
    a_c = 2.*cross(omega, v_prime[0, :])
    a = a_s + a_c
    v[i+1, :] = v[i, :] + a*dt
    r[i+1, :] = r[i, :] + v[i+1, :]*dt
    r_prime[i+1, :] = r_prime[i, :] + v_prime[0, :]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt
```

Oppgave 5 Regneoppgave: Fange romskip (18 poeng)

To like romskip, A og B , har form som sylindere med lengde L og flyr i motsatte retninger. Den relative hastigheten er v , og den er stor, slik at relativistiske effekter blir viktige. Romskipene passerer tett forbi hverandre. Begge er utstyrt med klaffer i endene som kan slås ut for å prøve å “fange” det andre. Dette går jo vanligvis ikke, men på grunn av lengdekontraksjonen ser begge romskipene at det andre er kortere og derfor tror begge at de skal kunne klare det. Figuren viser situasjonen slik den ser ut for en observatør på romskip A .



Vi lar referansesystem S følge romskip A , og lar hendelser sett fra S være beskrevet med umerkede koordinater (x, t) , mens referansesystem S' følger romskip B og beskriver de samme hendelsene med merkede koordinater (x', t') . Mannskapene på romskipene har forberedt seg godt, og slår ut begge klaffene på et tidspunkt som de mener er samtidig med at midten av romskipene passerer hverandre (som vi regner som nullpunkt for tiden i begge referansesystemene, $t = t' = 0$). Vi har nå tilsammen fire hendelser: Romskip A slår ut klaffen foran (A_F) og bak (A_B) og tilsvarende for romskip B (B_F og B_B). I referansesystem S har vi $t_{A_F} = t_{A_B} = 0$, $x_{A_F} = -L/2$ og $x_{A_B} = L/2$.

- (a) Hva er koordinatene til de samme hendelsene beskrevet i system S' ?
(4 poeng)

Vi har Lorentztransformasjonene ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

og de inverse

$$x = \gamma(x' + vt') \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

I system S har vi $t_{AF} = t_{AB} = 0$, $x_{AF} = -L/2$ og $x_{AB} = L/2$. I S' er koordinatene til de samme hendelsene

$$\begin{aligned} x'_{AF} &= \gamma x_{AF} = -\gamma \frac{L}{2} & t'_{AF} &= -\gamma \frac{v}{c^2} x_{AF} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{L}{2} \\ x'_{AB} &= \gamma x_{AB} = \gamma \frac{L}{2} & t'_{AB} &= -\gamma \frac{v}{c^2} x_{AB} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{L}{2} \end{aligned}$$

- (b) Finn koordinatene til B_F og B_B i begge referansesystemene.

(4 poeng)

Koordinatene til B_F og B_B er greie å finne i S' : $t'_{BF} = t'_{BB} = 0$, $x'_{BF} = L/2$ og $x'_{BB} = -L/2$ og vi finner

$$\begin{aligned} x_{BF} &= \gamma x'_{BF} = \gamma \frac{L}{2} & t_{BF} &= \gamma \frac{v}{c^2} x'_{BF} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{L}{2} \\ x_{BB} &= \gamma x'_{BB} = -\gamma \frac{L}{2} & t_{BB} &= \gamma \frac{v}{c^2} x'_{BB} = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{L}{2} \end{aligned}$$

- (c) Beskriv hendelsesforløpet slik det blir observert fra de to observatørene, og forklar hvordan begge kan hevde at de fanget det andre romskipet, og samtidig hevde at det andre ikke klarte det. Anta at klaffene er altfor svake til å stoppe et romskip, og at de bare knekker hvis de blir truffet.

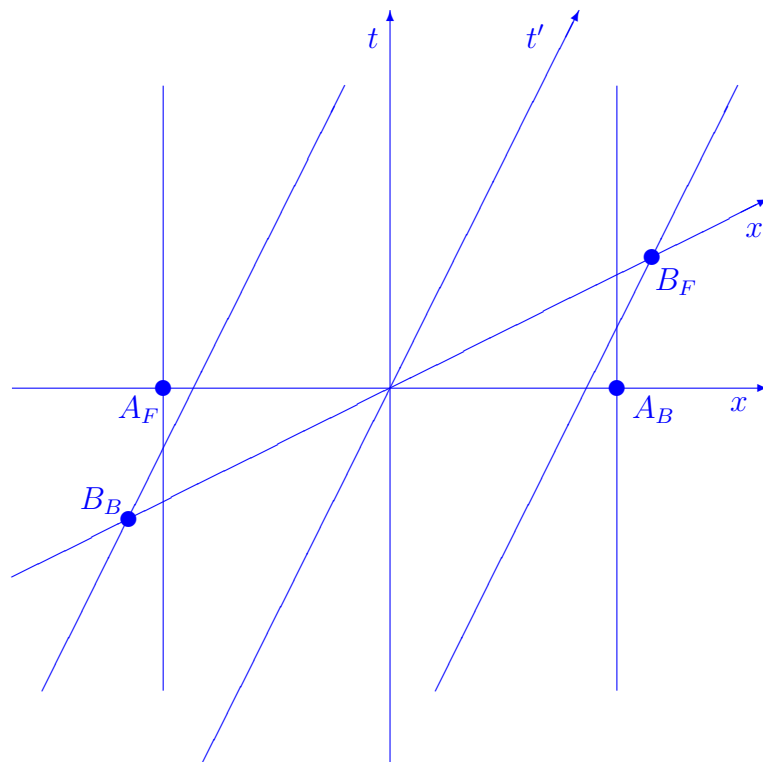
(6 poeng)

En observatør i romskip A (system S) vil beskrive hendelsene slik: Først slår B ned klaffen bak ($t_{BB} < 0$), dette skjer mens bakenden av romskip B er i posisjonen $x_{BB} < L/2$ altså før bakenden av B når framenden av A , og dermed slås klaffen ned foran A . Dette skjer ifølge A før midten av romskipene passerer hverandre. Siden B er Lorentzkontrahert må framenden av A treffe klaffen på B og knekke den før midten av romskipene passerer hverandre, som skjer ved $t = 0$. På det tidspunktet slår A ned begge sine klaffer, og "fanger" B . B fortsetter og knekker klaffen bak på A , og først etter det, ved tida t_{BF} slår B ned klaffen foran. Det skjer i posisjonen $x_{BF} > L/2$ som er bak bakenden av A . En observatør i A vil altså si at han klarte å fange B (bortsett fra at klaffene ikke holdt), mens B jukset og slo ned klaffen bak før romskipene møttes og klaffen foran etter at de hadde passert hverandre. En observatør i romskip B opplever selvfølgelig akkurat det samme, bare at rollene er byttet om.

- (d) Tegn et Minkowski-diagram (romtidsdiagram) som viser hendelsesforløpet. Merk spesielt av de fire hendelsene A_F , A_B , B_F og B_B .

(4 poeng)

Romtidsdiagram:

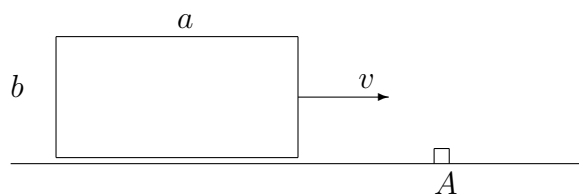


JB: Her har vi tegnet koordinatakser for både S og S' . Siden dette ikke er spesifisert i oppgaven krever vi ikke det for å få full poengsum.

Kommentar ACL (06.06.2022): Minkowski-diagrammer: forelesning 29 den 10.05.2022 og forelesning 30 den 12.05.2022 med Mentimeter-oppgave.

Oppgave 6 Regneoppgave: En kloss som kolliderer (16 poeng)

En rektangulær, homogen kloss med lengde a og høyde b og med masse M glir med hastighet v bortover et horisontalt underlag. Hjørnet nede til høyre på klossen hefter seg fast i en liten forhøyning A i underlaget slik at klossen begynner å rotere om denne sidekanten (du kan regne forhøyningen som uendelig liten).



- (a) Vis at treghetsmomentet til klossen om en akse som går gjennom massesenteret og som står vinkelrett “på papiret” er gitt ved

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).$$

(4 poeng)

Fra formelarket: $I = \int_M \rho^2 dm$. Vi bruker flatetettheten $\rho = M/ab$. Da er

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \rho(x^2 + y^2) = \frac{\rho}{12}(a^3b + ab^3) = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).$$

Kommentar ACL (06.06.2022): Jeg har sagt på forelesning at vi typisk oppgir treghetsmoment i oppgavene. Her vurderte vi likevel oppgaven som såpass rett fram at det var greit å ha den som en "vis at"-oppgave (greit integral med vanlige kartesiske koordinater, ingen sylinder- eller kulekoordinater som f.eks. i utregningen av treghetsmomentet til en kule). Den tar jeg (ACL) på min kappe. Vi gir mye kred for gode forsøk på denne.

- (b) Finn vinkelhastigheten umiddelbart etter at dreiningen begynner.

(4 poeng)

Spinnet før klossen treffer forhøyningen er lik massesenterets spinn omkring A : $L = \frac{1}{2}Mvb$. Treghetsmomentet til en kloss om en sidekant finner vi fra treghetsmomentet om midtpunktet og parallellakse-teoremet $I = I_{\text{senter}} + Md^2 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) + \frac{1}{4}M(a^2 + b^2) = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$. Spinnet er bevart siden det ikke er noe netto kraftmoment om A (kraften mellom klossen og forhøyningen virker i A og har ingen arm. Normalkraften fra underlaget og tyngdekraften er like, motsatt rettet og har samme arm. Så snart klossen begynner å rotere virker normalkraften også i A og bare tyngden får et moment om A . Da vil spinnet begynne å forandre seg). Bevaring av spinnet gir da vinkelfarten

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{\frac{1}{2}Mvb}{\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)} = \frac{3vb}{2(a^2 + b^2)}$$

- (c) Påvis at den kinetiske energien umiddelbart etter støtet er mindre enn umiddelbart før.

(4 poeng)

Før: $E_k = \frac{1}{2}Mv^2$. Etter:

$$E'_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3Mb^2}{8(a^2 + b^2)}v^2 < E_k$$

- (d) Hva er den største farten v klossen kan ha før støtet uten at den tipper over på høykant i den etterfølgende bevegelsen?

(4 poeng)

Rett etter at klossen hefter seg fast er den kinetiske energien E'_k og den potensielle energien $mgb/2$. Hvis den akkurat ikke skal tippe over må den kinetiske energien bli 0 når klossen har tyngdepunktet rett over A . Den potensielle energien er da $\frac{1}{2}Mg\sqrt{a^2 + b^2}$. Bevaring av energi: $E'_k + mgb/2 = \frac{1}{2}Mg\sqrt{a^2 + b^2}$ og vi får

$$v^2 = \frac{4}{3}g\frac{a^2 + b^2}{b^2} \left[\sqrt{a^2 + b^2} - b \right]$$

Eksamenssett slutt.