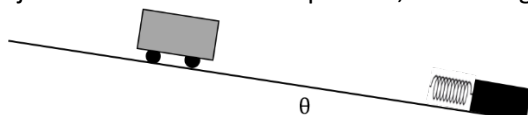


Maks poengsum: 76 poeng.

Oppgave 1: Flervalgsoppgaver (16 poeng) NB! 14 poeng siden 2.del av 1.4 ikke tas med

1.1. En lekebil triller ned en helning og treffer på en fjær som er festet i bunnen av skråplanet. Når fjæren er maksimalt komprimert, så har vognen...

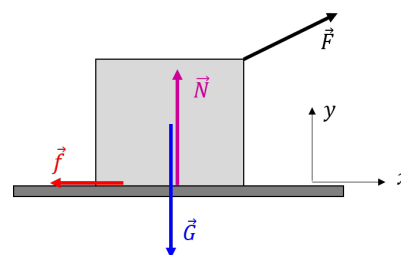


Velg ett alternativ:

- ☐ ingen akselerasjon, men en hastighet som ikke er null.
- ☐ hastighet og akselerasjon som begge er forskjellig fra null.
- ☒ ingen hastighet, men en akselerasjon som ikke er null.
- ☐ ingen hastighet og ingen akselerasjon.

Når fjæren er maksimalt komprimert er lekebilten i ro, så hastigheten er null. Men akselerasjonen er ikke null ettersom fjæren er komprimert og vil utøve en kraft på lekebilten i retning oppover skråplanet. Bilen er *ikke* plassert i ro foran fjæren, ettersom det står i oppgaveteksten at den triller ned skråplanet. Dermed har den en kinetisk energi gitt ved $\frac{1}{2}mv^2$ i det den treffer fjæren. Denne kinetiske energien konverteres til potensiell energi i fjæren. Derfor har fjæren en *større* potensiell energi (og fjærkraften er større), fordi fjæren blir mer komprimert enn om bilen bare hadde blitt plassert i ro inntil fjæren. Dersom bilen hadde blitt plassert i ro foran fjæren, ville den komprimert fjæren litt, akkurat nok til at fjærkraften hadde blitt like stor (og motsatt rettet) som tyngdekraftkomponenten til bilen ned langs skråplanet. Men dette er altså ikke tilfelle her. (2 poeng)

1.2. Du drar i en eske med en kraft $\vec{F}$ som vist i figuren, men på grunn av friksjon forblir esken i ro. Pilene i figuren viser retningen, men ikke nødvendigvis den riktige størrelsen på de forskjellige kreftene (friksjonskraft $\vec{f}$, tyngdekraft $\vec{G}$, normalkraft $\vec{N}$). Hvilken forhold mellom størrelsene på kreftene er riktig?



- ☐ $|\vec{F}| = |\vec{f}|$ og $|\vec{N}| > |\vec{G}|$
- ☐ $|\vec{F}| > |\vec{f}|$ og $|\vec{N}| = |\vec{G}|$
- ☐ $|\vec{F}| = |\vec{f}|$ og $|\vec{N}| = |\vec{G}|$
- ☒ $|\vec{F}| > |\vec{f}|$ og $|\vec{N}| < |\vec{G}|$

Esken forblir i ro, som betyr at summen av kreftene både i x- og y-retning må være null.

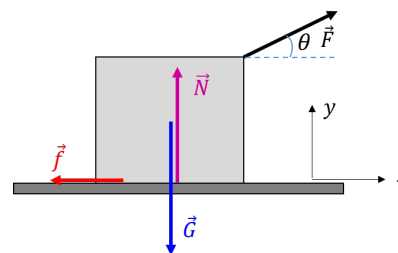
I x-retning får vi: $F \cos \theta - f = 0$

$$f = F \cos \theta < F$$

når vinkelen θ er større enn null.

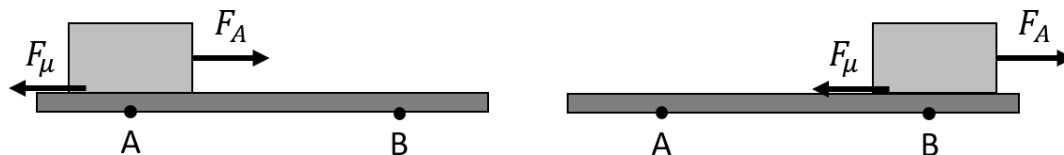
I y-retning får vi: $F \sin \theta + N - G = 0$

$$N = G - F \sin \theta < G$$



når vinkelen θ er større enn null. (2 poeng)

- 1.3. Du trekker en eske med en konstant horisontal kraft F_A langs et horisontalt bord. Esken beveger seg med konstant hastighet fra posisjon A til posisjon B. Friksjonskoeffisienten mellom esken og bordet er μ , og friksjonskraften fra bordet på esken er F_μ . Hvilken av følgende påstander er riktig?



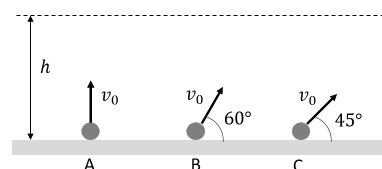
Velg ett alternativ:

- ☐ Arbeidet fra gravitasjonskraften på esken er ikke null.
- ☐ Friksjonskraften F_μ gjør positivt arbeid på esken.
- ☐ Absoluttverdien til arbeidet fra kraften F_A er like stor som absoluttverdien til arbeidet fra friksjonskraften F_μ .
- ☐ Det totale arbeidet fra nettokraften på esken er ikke null.
- ☐ Absoluttverdien til arbeidet fra kraften F_A er større enn absoluttverdien til arbeidet fra friksjonskraften F_μ .

Esken beveger seg ikke i vertikal retning, derfor gjør gravitasjonskraften ikke noe arbeid.

Friksjonskraften virker imot bevegelsesretningen og gjør derfor negativt arbeid. Siden esken beveger seg med konstant hastighet er nettokraften null, som også betyr at absoluttverdiene til kreftene F_A og F_μ er like store. Dermed er absoluttverdien til arbeidet gjort av friksjonskraften like stor som absoluttverdien til arbeidet gjort av den horisontale kraften. (2 poeng)

- 1.4. Du kaster tre baller fra samme høyde med samme fart v_0 , men med forskjellige vinkler som vist i figuren. Ball A kastes vertikalt oppover; ball B kastes med en vinkel på 60° i forhold til horisontal retning; ball C kastes med en vinkel på 45° . I første omgang ser vi bort fra luftmotstand. Ranger farten til de tre ballene når de er ved en høyde h over bakken.



Velg ett alternativ:

- ☐ $v_A > v_C > v_B$
- ☐ $v_A = v_B = v_C$
- ☐ $v_C > v_B > v_A$
- ☐ $v_A > v_B > v_C$

Uten luftmotstand er det bare gravitasjonskraften som virker på ballene. Denne kraften er konservativ og den mekaniske energien er bevart:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh$$

Alle tre har samme kinetiske energi og dermed samme fart ved høyde h , uavhengig av massen (kanselleres på begge sider av likhetstegnet). (2 poeng)

NB! DENNE DELOPPGAVEN VAR IKKE SYNLIG FOR ALLE I INSPERA OG TAS UT AV VURDERINGEN.

Er det annerledes hvis vi tar hensyn til luftmotstanden? Ranger farten til de tre ballene igjen hvis de er påvirket av en luftmotstandskraft.

Velg ett alternativ

- $v_A > v_C > v_B$
- $v_A = v_B = v_C$
- $v_A > v_B > v_C$
- $v_C > v_B > v_A$
- Ikke nok informasjon, farten avhenger av massen til ballen

Med luftmotstand, som er en ikke-konservativ kraft, er ikke lenger mekanisk energi bevart. Her er det to muligheter, og oppgaven gir egentlig for lite informasjon til å svare på dette (derfor burde både alternativet i midten og det siste alternativet gitt poeng). Luftmotstandskraften i seg selv avhenger ikke av massen, men vi får koblede diff-ligninger for akselerasjonen i x- og y-retning nå som luftmotstanden inkluderes. Disse ligningene blir (se forelesning nr. 8, 02.02.2021):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$$

Luftmotstandskoeffisienten D avhenger av radien R på ballen, $D \approx 12.0\rho R^2$ hvor ρ er tettheten til luft. Det er rimelig å anta at R er identisk ut fra figuren, som da gir samme luftmotstandskoeffisient, men det hadde vært best om det også var presisert i oppgaveteksten.

Vi kan se på de to mulighetene for massen til ballen:

- (1) Ballene har samme masse. Da er svaralternativet $v_A > v_B > v_C$ riktig, siden ballene fortsatt kastes med samme utgangsfart v_0 . Luftmotstandskraften virker alltid imot bevegelsesretningen. Horisontalkomponenten til hastigheten bidrar også til å bremse bevegelsen. Jo større horisontalkomponenten til hastigheten er, jo mindre er farten når ballen oppnår høyden h . En annen måte å se det på, er at banen for å nå høyden h er lengre for små vinkler, og luftmotstandskraften gjør mer negativt arbeid langs en lengre bane.
- (2) Ballene har ikke samme masse. Da er det ikke mulig å avgjøre hva som skjer med farten til de tre ballene med forskjellig utgangsvinkel, og det riktige svaralternativet er det siste (Ikke nok informasjon, farten avhenger av massen til ballen).

(2 poeng)

1.5. En eske med masse m ligger i en heis som beveger seg oppover med konstant fart. Hvilken påstand er riktig?

- Normalkraften fra heisen må være større enn mg for å overvinne tyngdekraften og lage ny energi oppover.
- Kinetisk energi fra esken konverteres til potensiell energi til esken.
- Kinetisk energi fra heisen konverteres til potensiell energi til esken.
- Normalkraften fra heisen gjør arbeid på esken, som skaper potensiell energi til esken.

Systemet vi ser på er esken, alt annet er omgivelser. Gulvet i heisen utøver en normalkraft på esken, og esken beveger seg opp med konstant hastighet (siden heisen gjør det), derfor har esken konstant kinetisk energi. Normalkraften gjør da et positivt arbeid på esken (normalkraften peker opp i vertikal retning, samme retning som bevegelsesretning til esken). (2 poeng)

1.6. En stor ball med masse $M = 2m$ og hastighet v_0 kolliderer med en liten ball med masse m som er i ro. Er det mulig at den store ballen stanser fullstendig og den lille ballen fortsetter med hastighet $v = 2v_0$?



Velg ett alternativ:

- ☐ Nei, det bryter med bevaring av energi.
- ☐ Ja, det er mulig.
- ☐ Nei, det bryter med bevaring av både energi og bevegelsesmengde.
- ☐ Nei, det bryter med bevaring av bevegelsesmengde.

Denne oppgaven er identisk med en Mentimeter-oppgave fra forelesning den 2.mars 2021.

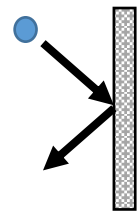
Denne situasjonen bryter med bevaring av mekanisk energi. Dette er en elastisk kollisjon, og i en elastisk kollisjon er kinetisk energi bevart. Vi regner ut kinetisk energi før kollisjonen:

$$K_0 = \frac{1}{2} 2mv_0^2 = mv_0^2. \text{ Så regner vi ut kinetisk energi etter kollisjonen og sammenligner:}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m(2v_0)^2 = 2mv_0^2. \text{ Siden vi får } K_1 = 2K_0 \text{ bryter dette med energibevaring – hvor skulle den ekstra energien komme fra? (2 poeng)}$$

1.7. En ball treffer en vegg og spretter av som vist i figuren. Anta at kollisjonen er elastisk. Hvilken vektor representerer best retningen til impulsen som ballen får fra veggen?

- ☐ ↘
- ☐ →
- ☐ ↑
- ☒ ←
- ☐ ↗
- ☐ ↓
- ☐ ↖
- ☐ ↙



Impulsen er en vektorstørrelse som er definert som forskjell i bevegelsesmengde:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0. \text{ Endringen i bevegelsesmengden er i horisontal retning mot venstre. (2 poeng)}$$

Oppgave 2: Tekstbesvarelse (4 poeng)

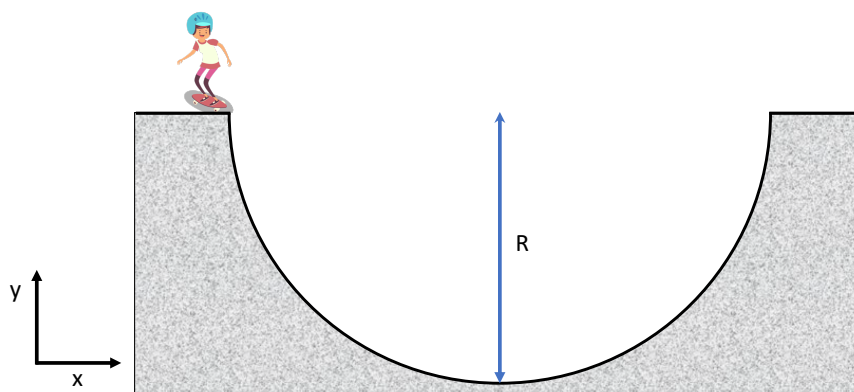
En kvinne står på en frossen innsjø på blank is uten friksjon. Hun kaster en stein med hastighet $\vec{v}_0$ i en retning som har både en horisontal og en vertikal komponent. Vi betrakter systemet som består av kvinnen og steinen. Er bevegelsesmengden i systemet bevart? Hvorfor eller hvorfor ikke? Er enkelte komponenter av bevegelsesmengden bevart? Igjen, hvorfor eller hvorfor ikke?

Denne oppgaven er identisk med diskusjonsoppgave D5 uke 7 (3.-5.mars 2021). Bevegelsesmengden er ikke bevart i systemet fordi det virker en ytre vertikal nettokraft fra isen mens hun kaster steinen. I starten er bevegelsesmengde i systemet null. Etterpå har steinen bevegelsesmengde oppover. Vi må inkludere jordkloden for å betrakte et lukket system hvor bevegelsesmengden er bevart. Det virker ingen ytre kraft i horisontal retning siden friksjonen er null. Derfor er den horisontale komponenten av bevegelsesmengden bevart. Etter at hun har kastet, har steinen horisontal bevegelsesmengde i en retning, mens hun har den samme bevegelsesmengden i motsatt retning.

(4 poeng). 2 poeng for at bevegelsesmengden ikke er bevart i systemet kvinne pluss stein, 2 poeng for at den horisontale komponenten er bevart. For å få full pott må det også være riktige forklaringer på begge punktene.

Oppgave 3: Rullebrettkjører i halfpipe (17 poeng)

- 3.1 En rullebrettkjører trener i en halfpipe med rullebrettet sitt. Rullebrettbanen kan beskrives som en halvsirkel med radius R . Rullebrettkjøreren A står på toppen av banen med en høyde $h = R$. Massen til rullebrettkjøreren og rullebrettet er til sammen m_A . Du kan se bort fra friksjon og luftmotstand, og du kan beskrive rullebrettkjøreren som en liten kule med radius mye mindre enn R .



Vis at farten til rullebrettkjøreren i bunnen av halfpipe-banen er gitt ved $v_A = \sqrt{2gR}$, og beregn normalkraften som virker på rullebrettkjøreren i bunnen av banen. Hvor stor er normalkraften i forhold til tyngdekraften? (4 poeng)

Denne oppgaven har svært mange likhetstrekk med oppgave 3.1 og 3.2 i midtveis-eksamen fra 2019. Ettersom det ikke er luftmotstand eller friksjon, og normalkraften står vinkelrett på hastighetsvektor i sirkelbevegelsen og gjør ikke noe arbeid, er det kun gravitasjonskraften som er årsak til bevegelsen og har en komponent som virker i bevegelsesretningen. Vi kan da bruke bevaring av mekanisk energi:

$$\begin{aligned} U_0 + K_0 &= U_1 + K_1 \\ m_A g h &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 \\ v_A &= \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR} \end{aligned}$$

(2 poeng)

For å beregne normalkraften bruker vi Newtons andre lov og setter inn sentripetalakselerasjonen:

$$N - m_A g = m_A \frac{v_A^2}{R}$$

$$N = m_A g + m_A \frac{2gR}{R} = 3m_A g$$

(2 poeng – tilsammen 4 poeng for deloppgaven). For å få full pott må det forklares hvorfor mekanisk energi er bevart, ellers trekkes 1 poeng.

- 3.2 Rullebrettkjøreren A er uforsiktig og setter utfor banen uten å se at det står en annen rullebrettkjører, B, i ro i bunnen av banen. De to kolliderer med hverandre, griper tak i hverandre og beveger seg sammen etter kollisjonen. Den andre kjøreren har masse $m_B = \frac{3}{2}m_A$ (inkludert rullebrettet). Vis at den felles farten de får etter kollisjonen er gitt ved $v_{AB} = \frac{2}{5}v_A$, hvor v_A er farten fra oppgave 3.1. Hvor mye kinetisk energi K_{AB} har de to rullebrettkjørerne etter kollisjonen i forhold til den kinetiske energien K_A som rullebrettkjører A hadde før kollisjonen? (5 poeng)

Mekanisk energi er ikke bevart for en fullstendig uelastisk kollisjon, men bevegelsesmengden er bevart siden ytre krefter ikke spiller noen rolle under kollisjonen. Ettersom personen B i bunnen av banen er i ro, får vi:

$$mv_A + 0 = (m_A + m_B)v_{AB}$$

$$v_{AB} = \frac{m_A}{(m_A + m_B)} v_A = \frac{m_A}{m_A + \frac{3}{2}m_A} v_A = \frac{2}{5}v_A,$$

hvor v_{AB} er den felles farten de får etter kollisjonen. (3 poeng)

Rett før kollisjonen har rullebrettkjøreren i bevegelse en kinetisk energi

$$K_A = \frac{1}{2}m_A v_A^2$$

Etter kollisjonen er den kinetiske energien gitt ved

$$K_{AB} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{AB}^2 = \frac{1}{2}\left(m_A + \frac{3}{2}m_A\right)\left(\frac{2}{5}v_A\right)^2 = \frac{1}{2}m_A \frac{2}{5}v_A^2 = \frac{2}{5}K_A$$

(2 poeng – tilsammen 5 poeng). For å få full pott må det forklares hvorfor bevegelsesmengde er bevart.

- 3.3 Hvor høyt opp kommer de to rullebrettkjørerne på den motsatte veggen? Uttrykk høyden som funksjon av radiusen R . (3 poeng)

Ved maksimal høyde er farten til de to rullebrettkjørerne lik null. Siden det ikke er friksjon eller luftmotstand, er mekanisk energi nå bevart fra rett etter at de kolliderer til de når den ukjente høyden. Rett etter kollisjonen er det kun kinetisk energi, og ved maks høyde er det kun potensiell energi. Vi får:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$0 + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{AB}^2 = (m_A + m_B)gh_2 + 0$$

$$h_2 = \frac{v_{AB}^2}{2g} = \left(\frac{2}{5}v_A\right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{4v_A^2}{25} \frac{1}{2g} = \frac{4 \cdot 2gR}{25 \cdot 2g} = \frac{4}{25}R$$

(3 poeng).

- 3.4 En tredje person C (med masse m_C) har glemt rullebrettet sitt hjemme, og sklir fra toppen og ned i halfpipe-banen sittende på en stor bit av en pappkartong. Mellom pappkartongen og halfpipe-banen virker det en dynamisk friksjonskraft som gjør et negativt arbeid $W_d = -\frac{1}{4}m_C gR$ fra

toppen og ned til bunnen av banen. Hva er farten i bunnen av banen for personen på pappkartongen? Sammenlign med farten du fant i oppgave 3.1. (5 poeng)

Her gjelder det å bruke arbeid-energi-teoremet:

$$W_{a \rightarrow b}^{net} = \int_C \vec{F}^{net} \cdot d\vec{r}$$

Siden gravitasjonen er en konservativ kraft, trenger vi kun ta hensyn til start og slutt i y-retning, dvs. $h = R$ og arbeidet er lik forskjell i potensiell energi:

$$W_G = \int_R^0 -m_C g dy = m_C g R$$

Normalkraften står vinkelrett på bevegelsesretning og gjør derfor ikke noe arbeid.

Videre er det oppgitt at friksjonen gjør et negativt arbeid $W_d = -\frac{1}{4}m_C g R$. Da får vi at:

$$W_{a \rightarrow b}^{net} = W_G + W_d = m_C g R - \frac{1}{4}m_C g R = \frac{3}{4}m_C g R.$$

(2 poeng)

Dette er nå lik forskjell i kinetisk energi fra topp til bunn i banen:

$$W_{a \rightarrow b}^{net} = K_1 - K_0$$

På toppen er fortsatt farten null, så vi får for hastigheten v_C til person C i bunnen av banen:

$$\frac{3}{4}m_C g R = \frac{1}{2}m_C v_C^2$$

$$v_C^2 = \frac{3}{2}gR \rightarrow v_C = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$$

(2 poeng)

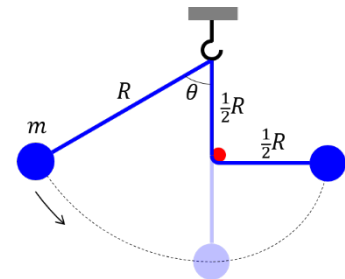
Sammenlignet med farten i oppgave 3.1:

$$\frac{v_C}{v_A} = \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)gR}{2gR}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.865 \rightarrow v_C \approx 0.87v_A$$

(1 poeng – tilsammen 5 poeng for denne deloppgaven).

Oppgave 4 (19 poeng)

- 4.1 Et pendellodd med masse m er festet i en masseløs snor med lengde R . Pendelen slippes uten initialhastighet fra en vinkel θ som vist i figuren. Når pendelen er i en vertikal posisjon treffer snoren en horisontal stang som befinner seg halvveis mellom festepunktet og det laveste punktet i banen. Stangen forkorter svingradien på pendelen en faktor 2, slik at loddet svinger nå om stangen med en pendellengde $r = \frac{1}{2}R$. Du kan se på videoen for å få en bedre



forståelse av bevegelsen til denne ufrie pendelen. Vi ser bort fra luftmotstand. Hvor stor var den opprinnelige vinkelen θ hvis den forkortede pendelen svinger opp til en horisontal posisjon på den andre siden? Forklar og begrunn svaret. (3 poeng)

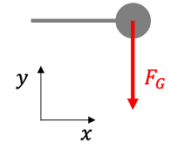
Uten luftmotstand er pendelen bare påvirket av gravitasjon og snordrag. Snordraget står alltid vinkelrett på bevegelsesretning og gjør ikke noe arbeid. Gravitasjonskraften er konservativ.

Derfor er den mekaniske energien bevart: $K_0 + U_0 = K_1 + U_1$. I starten er pendelloddet i ro, så

$K_0 = 0$. Akkurat i det pendelen er i horisontal posisjon, er den også i ro, slik at også $K_1 = 0$. Hva med den potensielle energien? Pendelen svinger opp til **samme** høyde på begge sider, siden $U_0 = U_1 \rightarrow mgh_0 = mgh_1$. Høyden til pendelen der den slippes er $R \cos \theta$, som er lik $\frac{1}{2}R$:

$$R \cos \theta = \frac{1}{2}R$$

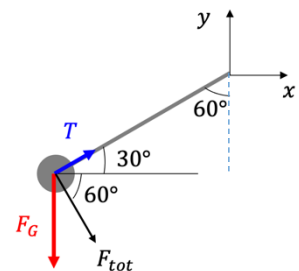
$$\theta = 60^\circ$$



(3 poeng). For å få full pott må det forklares hvorfor mekanisk energi er bevart.

- 4.2 Tegn et frilegemediagram for pendelloddet i det høyeste punktet på banen på høyre side, når pendellengde er $r = \frac{1}{2}R$. Hvilken retning har akselerasjonen og hvor stort er snordraget? Forklar! (3 poeng)

$\vec{F}_G$: tyngdekraft. I det høyeste punktet er farten null og pendelen har ingen sentripetalakselerasjon. Når pendelen er horisontal i det høyeste punktet er akselerasjonen rettet nedover. Snordraget er derfor null og den eneste kraften som virker er gravitasjon. (3 poeng) For å få full pott må koordinatsystem være med og symboler (tyngdekraften) definert.



- 4.3 Tegn et frilegemediagram for pendelloddet i det høyeste punktet på banen på venstre side, når pendellengden er R . Tegn også nettokraften inn i diagrammet sammen med vinklene til kreftene i forhold til horisontal- og vertikalretning. Bestem størrelsen til snordraget i forhold til tyngdekraften. (5 poeng)

I det høyeste punktet på banen har snoren en 60° vinkel i forhold til vertikalretning. Nettokraften og akselerasjonen virker i tangentiell retning på banen, altså med en 60° vinkel i forhold til horisontalretning. Vi dekomponerer nettokraften F_{tot} :

$$F_x = T_x = T \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}T$$

$$F_y = T \sin 30^\circ - mg = \frac{1}{2}T - mg$$

Vi kjenner retningen til nettokraften, altså forholdet mellom horisontal- og vertikalkomponenten:

$$\tan 60^\circ = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-F \cos 60^\circ}{F \sin 60^\circ} = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\frac{1}{2}T - mg}{\frac{\sqrt{3}}{2}T}$$

$$\frac{3}{2}T = mg - \frac{1}{2}T$$

$$T = \frac{1}{2}mg$$

Dette kan sees enda enklere ved å legge koordinatsystemet slik at y-aksen peker opp langs snoren, og x-aksen peker i retning F_{tot} . Newtons 2. lov i y-retning gir da $T - mg \cos 30^\circ = 0 \rightarrow T = \frac{1}{2}mg$.

(2 poeng for frilegemediagram, 3 poeng for størrelsen til snordraget – totalt 5 poeng)

- 4.4 Vi flytter stangen nedover slik at den vertikale avstanden mellom stangen og festepunktet til pendelen nå er h . I et nytt eksperiment slipper vi pendelen uten initialhastighet fra en horisontal posisjon i punkt A. Etter at snoren har truffet stangen, er den nye pendellengden nå $r = R - h$. Vis at farten v_C til pendelloddet i punkt C (rett over stangen) må minst være:

$$v_C > \sqrt{(R - h)g}$$

for at den forkortede pendelen fullfører en sirkelbane med radius r med stram snor. (4 poeng)

På toppen av banen virker både gravitasjon og snordraget T nedover og resulterer i sentripetalakselerasjon. Vi bruker Newtons andre lov:

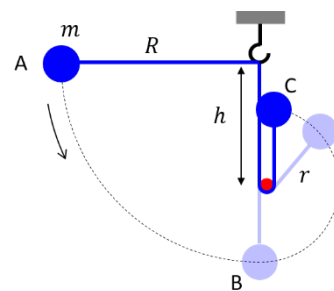
$$\begin{aligned} -mg - T &= -m \frac{v_C^2}{r} \\ T &= m \left(\frac{v_C^2}{r} - g \right) \end{aligned}$$

(2 poeng)

For at snoren skal forbli stram må vi ha: $T > 0$.

$$\begin{aligned} v_C^2 &> rg = (R - h)g \\ v_C &> \sqrt{(R - h)g} \end{aligned}$$

(2 poeng – tilsammen 4 poeng).



- 4.5 Hva må forholdet mellom avstanden h og lengden R minst være for at pendelen fullfører en sirkelbevegelse rundt stangen? (4 poeng)

Siden vi ser bort fra luftmotstand og snordraget alltid virker vinkelrett på hastighetsvektor i sirkelbevegelsen (gjør ikke noe arbeid), er mekanisk energi bevart. Vi sammenligner total, mekanisk energi i punktene A og C. Det er kun potensiell energi i punkt A, mens i punkt C er det både potensiell energi (høyde $2r$) og kinetisk energi. Vi får:

$$\begin{aligned} mgR &= mg2r + \frac{1}{2}mv_C^2 \\ gR &= 2g(R - h) + \frac{1}{2}v_C^2 \\ 2gh - gR &= \frac{1}{2}v_C^2 \end{aligned}$$

(2 poeng)

Vi setter inn resultatet fra 4.4 for v_C :

$$\begin{aligned} v_C^2 &= 4gh - 2gR > (R - h)g \\ 5gh &> 3gR \\ h &> \frac{3}{5}R \end{aligned}$$

(2 poeng – tilsammen 4 poeng).

Oppgave 5 (22 poeng)

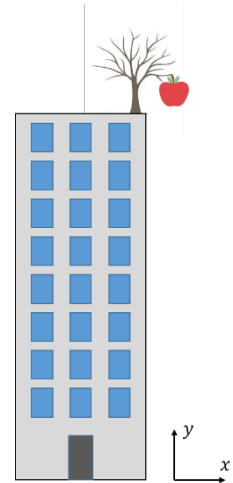
- 5.1 Et eple med masse m henger i høyde h over bakken i et tre som vokser på taket av en høy bygning. Eplet er påvirket av gravitasjon og luftmotstandskraften. Vi modellerer luftmotstandskraften som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$, hvor D er en konstant med enhet kg/m og $\vec{v}$ er den relative hastigheten mellom eplet og luften. Plutselig løsner eplet fra stilken og faller ned. Finn terminalhastigheten v_T , uttrykt som funksjon av m , D og tyngdeakselerasjonen g , som eplet kan oppnå hvis bygningen er høy nok. (3 poeng)

Tyngdekraften $\vec{F}_G = -mg\hat{j}$ virker nedover. Luftmotstandskraften virker oppover mens eplet faller ned: $\vec{F}_D = Dv^2\hat{j}$. Eplet oppnår terminalhastigheten når luftmotstandskraften blir like stor som tyngdekraften, slik at nettokraften og akselerasjonen til eplet blir null:

$$Dv_T^2 - mg = 0$$
$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{D}}$$

Vi velger negativ løsning siden eplet faller ned (negativ y-retning).

(1 poeng for å bestemme kreftene, 2 poeng for utregningen – tilsammen 3 poeng). Om det er valgt et annet koordinatsystem enn vist i tegningen (positiv y-akse oppover) er det greit, hvis det er spesifisert i besvarelsen. Siden det er ikke satt vektortegn på terminalhastigheten i oppgaven, er det helt greit om terminalfarten (absoluttverdien av hastigheten) oppgis.



- 5.2 Skriv et program som beregner hastighet og posisjon til eplet som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å definere initialbetingelsene og skrive integrasjonsløkken. Beregningen skal slutte når eplet treffer bakken. (4 poeng)

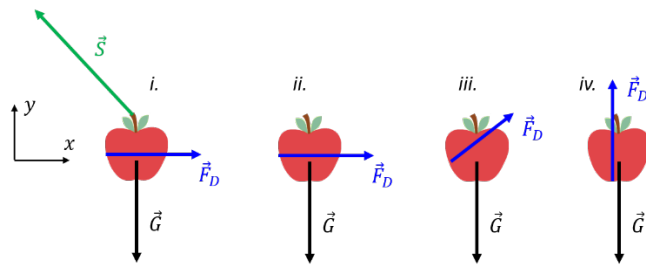
```
y(1) = h;  
v(1) = 0;  
i = 1;  
while (y(i) >= 0.0)  
    Fnet = -D*abs(v(i))*v(i) - m*g;  
    a(i) = Fnet/m;  
    v(i+1) = v(i) + dt*a(i);  
    y(i+1) = y(i) + dt*v(i+1);  
    t(i+1) = t(i) + dt;  
    i = i + 1;  
end
```

(1 poeng for initialbetingelser, 3 poeng for riktig Euler-Cromer-løkke med riktig akselerasjon – tilsammen 4 poeng).

- 5.3 Vi har den samme situasjonen som før, men nå blåser det en kraftig vind i horisontal retning med konstant hastighet $\vec{w} = w\hat{i}$. Tegn fire frilegemediagrammer for eplet:

- når eplet fortsatt henger på treet.
- umiddelbart etter at eplet har løsnet fra stilken.
- en kort tid etter at eplet har løsnet fra stilken.
- en lang tid etter at eplet har løsnet fra stilken.

Kort tid og lang tid skal sees i forhold til tiden det tar å oppnå terminalhastigheten. Her skal du bare tegne diagrammene. (Husk aksekors og definisjon av symbolene.) Du skal forklare diagrammene og retningen på kreftene i neste deloppgave. (4 poeng)



$\vec{S}$: «snordrag» fra stilken; $\vec{F}_D$: luftmotstandskraft; $\vec{G}$: gravitasjon.

(1 poeng for hvert riktige frilegemediagram – tilsammen 4 poeng. 1 poeng trekk hvis kreftene ikke er definert, 1 poeng trekk hvis koordinatsystemet mangler.)

5.4 Forklar frilegemediagrammene fra den forrige deloppgaven. Forklar spesielt retningen til kreftene i forhold til bevegelsesretningen som eplet har relativt til huset og relativt til luften. (4 poeng)

Gravitasjonskraften peker nedover og endrer seg ikke.

- Vinden blåser i x-retning, som betyr at eplet beveger seg i negativ x-retning relativt til luften. Luftmotstandskraften peker derfor i positiv x-retning. Så lenge eplet henger i treet er nettokraften null. Kontaktkraften fra stilken på eplet må derfor kompensere både gravitasjon og luftmotstand, slik at nettokraften blir null.
- Umiddelbart etter at eplet løsner er kontaktkraften fra stilken borte, men eplet har ikke ennå fått noen hastighet. Luftmotstandskraften er derfor uendret. Eplet får akselerasjon både i negativ y- og positiv x-retning.
- Etter en kort tid har eplet fått en hastighet både i negativ y- og i positiv x-retning, men har ikke ennå oppnådd terminalhastighet. Hastigheten nedover gir en luftmotstandskomponent i positiv y-retning. Luften beveger seg fortsatt raskere i x-retning enn eplet, slik at luftmotstandskraften fortsatt har en komponent i positiv x-retning, som akselererer eplet videre i x-retning.
- Etter en lang tid har eplet nådd terminalhastigheten, både i horisontal og i vertikalretning. Eplet beveger seg nå med konstant hastighet nedover, og i tillegg beveger seg eplet med samme hastighet som vinden i horisontalretning. Uten den relative hastigheten mellom eplet og luften i horisontal retning er x-komponenten til luftmotstandskraften borte. Luftmotstandskraften peker opp og kompenserer gravitasjon, slik at nettokraften blir null.

(1 poeng for hver forklaring – tilsammen 4 poeng)

5.5 Finn et vektorielt uttrykk for luftmotstandskraften i situasjonen hvor eplet beveger seg med hastighet $\vec{v}$ relativt til bygningen, og luften beveger seg med hastighet $\vec{w}$ relativt til bygningen.

Sjekk at retningen til kraften er riktig i spesialtilfellene hvor enten $\vec{w} = \vec{0}$ eller $\vec{v} = \vec{0}$. (3 poeng)

Luftmotstandskraften er avhengig av den relative hastigheten mellom eplet og luften, altså:

$$\vec{F}_D = -D|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$$

(2 poeng)

Uten vind har vi $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$, og vi er tilbake i samme tilfelle som i oppgave 5.1, og i situasjon iv i oppgave 5.4. I tilfellet med $\vec{v} = \vec{0}$ og med vind får vi:

$$\vec{F}_D = -D|\vec{w}|(-\vec{w}) = D|\vec{w}|(\vec{w})$$

som betyr at luftmotstandskraften peker i samme retning som vinden. Dette tilsvarer situasjon ii i oppgave 5.4.

(1 poeng – tilsammen 3 poeng for deloppgaven)

- 5.6 Modifiser programmet ditt for å ta hensyn til en horisontal vind. Programmet skal nå beregne hastighet $\vec{v}(t)$ og posisjon $\vec{r}(t)$ som vektorielle størrelser. Det er igjen tilstrekkelig å definere initialbetingelser og skrive ned integrasjonsløkken. Programmet skal igjen avsluttes når eplet treffer på bakken. (4 poeng)

```

r(1,:) = [0 h];
v(1,:) = [0 0];
i = 1;
while (r(i,2)>=0.0)
    Fnet = -D*norm(v(i,:)-w)*(v(i,:)-w) - m*g*[0 1];
    a(i,:) = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a(i,:);
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end

```

(1 poeng for initialbetingelser, 3 poeng for riktig Euler-Cromer-løkke med riktig akselerasjon – tilsammen 4 poeng).