Bølgjer i sylinderkoordinatar og besselfunksjonar

Vi ser på bølgjer som går i z-retninga i eit homogent stoff med permittivitet ε og permeabilitet μ, slik at E-feltet har z-komponent

$$E_z(r,\varphi,z,t) = \mathrm{Re}[\bar{E}_z(r,\varphi)\exp(j\omega t - j\beta_z z)]. \tag{1}$$

$\bar{E}_z$ oppfyller då likninga

$$\nabla_\perp^2 \bar{E}_z + \beta_c^2 \bar{E}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{E}_z}{\partial \varphi^2} + \beta_c^2 \bar{E}_z = 0, \tag{2}$$

$$\text{der} \quad \beta_c^2 = \beta^2 - \beta_z^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \beta_z^2. \tag{3}$$

Denne likninga kan ein som vist i læreboka av Rao løyse med separasjon av variable:

$$\bar{E}_z(r,\varphi) = \bar{R}(r)\bar{\Phi}(\varphi), \tag{4}$$

$$\text{der} \quad \bar{\Phi}'' + n^2\bar{\Phi} = 0, \tag{5}$$

$$\bar{R}'' + \bar{R}'/r + (\beta_c^2 - n^2/r^2)\bar{R} = 0, \tag{6}$$

og n er eit heiltal. Den siste likninga kan med substitusjonen $\bar{R}(r) = r^{-1/2}u(r)$ også skrivast

$$u'' + [\beta_c^2 - (n^2 - 1/4)r^{-2}]u = 0, \tag{7}$$

som for store r ($\beta_c r >> n$) har løysingar som kan tilnærmast med

$$u(r) \approx \exp(\pm j\beta_c r). \tag{8}$$

Løysingane for $\Phi(\varphi)$ blir trigonometriske funksjonar, lineærkombinasjonar av $\sin(n\varphi)$ og $\cos(n\varphi)$ eller av $\exp(+jn\varphi)$ og $\exp(-jn\varphi)$, medan løysingane for $\bar{R}(r)$ for store r altså kan tilnærmast med trigonometriske funksjonar av argumentet $\beta_c r$, dividert med kvadratrotarota av r.

Dersom ein i likning (6) innfører ny variabel $x = \beta_c r$ får ein Bessellikninga. Løysingane av Bessellikninga kan uttrykkast ved det som heiter bessel-, neumann- og hankelfunksjonar. Besselfunksjonane oscillerer for $x > n$ og er tilnærma lik null for $x < n$, medan neumannfunksjonane også oscillerer for $x > n$, men divergerer mot -∞ for $x < n$. Desse funksjonane er velkjende i matematikken, og programpakker som Maple og Matlab reknar dei ut nøyaktig. I Maple og Matlab (og mange lærebøker) er neumannfunksjonane kalla $Y_n(x)$ i staden for det som er bruka i læreboka til Rao, $N_n(x)$.

Fylgjande tilnærmingar gjeld for stort argument:

$$\text{Besselfunksjonar}: \quad J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{8}$$

$$\text{Neumannfunksjonar}: \quad N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{9}$$

$$\text{Hankelfunksjonar}: \quad H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm jN_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp[\pm j(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})] \tag{10}$$

Desse tilnærmingane er svært gode så snart ein har gått utover x-aksen forbi n og eit par oscillasjonar av funksjonen.

I tillegg til tilnærmingane for store argument har vi tilnærmingar for små argument:

$$J_n(x) \approx \frac{(x/2)^n}{n!} \quad (\approx 0 \text{ for } x < n) \tag{11}$$

$$N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi(x/2)^n} \quad (\text{stor og negativ for } x < n) \tag{12}$$

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln(\frac{x}{2}) \tag{13}$$

Det er også verdt å merke seg at likning (2) er ei eigenverdilikning, med $-\beta_c^2$ som eigenverdi for operatoren $\nabla_\perp^2$.