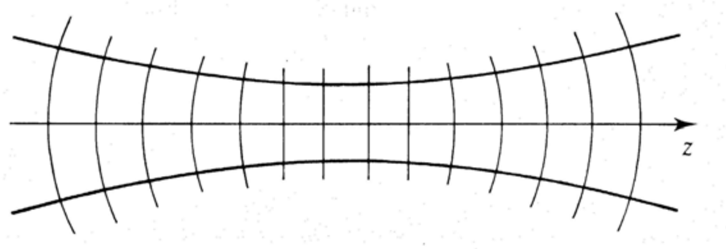
Diffraksjon av strålebunt med gaussfordeling

Vi ser på elektromagnetiske bølgjer som er y-polarisert, har ein bølgjefront i x-y-planet, går mot høgre (i positiv z-retning), har same feltamplitude for alle y-verdiar, og har ein amplitude som er gaussfordelt som funksjon av x. Då vil feltet i eit vilkårleg plan som er parallelt med x-y-planet også vera gaussfordelt. Bølgjefrontane er sirkelforma, og langt frå origo ser det ut som om bølgjene strålar ut frå eit punkt i origo med ei gaussfordeling som funksjon av vinkelen frå z-aksen. Dette er vist i figuren nedanfor, der bølgjefrontane i feltet er teikna saman med to kurver som visar kvar feltet er ein faktor $e = 2{,}718$ mindre enn langs z-aksen.



Ei slik feltfordeling blir kalla ein gaussstrålebunt (*eng. gaussian beam*), og vi seier at strålebunten har midjen sin (eng. *beam waist*) der han er på det smalaste, i x-y-planet ved $z = 0$.

Vi skal gå gjennom litt av den matematiske formalismen for gaussstrålebuntar. La 1/e-breidda til fordelinga vera $2x_0$, og la oss gå ut frå at breidda er mykje større enn bølgjelengda $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$. c er lysfarten, ω er vinkelfrekvensen til bølgjene og k er vinkelrepetensen for planbølgjer med den frekvensen. (Formalismen er den same som den vi brukar for å analysere dispersjonsforbreiing av gausspuls, kap. 9.5 i læreboka av Rao.) Langs x-aksen er feltstyrken

$$\bar{e}(x,z=0) = e_0 \exp\left(-(x/x_0)^2\right) =. \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \bar{E}(k_x,z=0)\exp(-jk_x x), \qquad (1)$$

der vi har representert feltet både i rommet, ved $\bar{e}(x,z=0)$, og i fourier-rommet, ved $\bar{E}(k_x,z=0)$. Fourierrepresentasjonen av feltfordelinga (1) blir

$$\bar{E}(k_x,z=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\bar{e}(x,z=0)\exp(jk_x x) = \frac{e_0 x_0}{\sqrt{4\pi}}\exp(-k_x^2 x_0^2/4), \qquad (2)$$

der vi for å utføre integralet innfører ny integrasjonsvariabel $x' = x - jk_x x_0^2/2$ og brukar at

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,. \qquad (3)$$

Som kjent er fourierrepresentasjonen av ein gaussfunksjon også ein gaussfunksjon, og 1/e-breidda til $\bar{E}(k_x,0)$ er $4/x_0$.

Eit viktig steg i analysen er å innsjå at fourierkomponenten $\bar{E}(k_x,0)$ representerer ei bølgje med vinkelrepetens k_x i x-retning, og at vi samtidig kan velje å la han representere ei planbølgje som går i positiv z-retning og kryssar x-y-planet med ein bølgjevektor $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_z\hat{\mathbf{z}}$. For elektromagnetiske planbølgjer er

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} \qquad (4a)$$

med tilnærminga $k_z \approx k\left[1 - (k_x/k)^2/2\right].$ (4b)

Tilnærminga (4b) for k_z gjeld når $|k_x| << k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Vi starta med å seie at midjebreidda $2x_0$ skal vera stor i høve til bølgjelengda, og då ser vi at 1/e-breidda til $\bar{E}(k_x, 0)$ nettopp oppfyller dette vilkåret: $4/x_0 << 2\pi/\lambda$.
Planbølgja som svarar til fourierkomponenten (2) blir dermed

$$\bar{E}(k_x, x, z) = \bar{E}(k_x, 0)\exp(-jk_x x - jk_z z) \approx \left(e_0 x_0/\sqrt{4\pi}\right)\exp[-k_x^2(x_0^2 - 2jz/k)/4 - jk_x x - jkz]. \quad (5)$$

Sidan $|k_x| << k \approx k_z$ representerer denne likninga ei planbølgje som går nesten parallelt med z-aksen og er y-polarisert. Om vi integrerer opp bidraga frå alle planbølgjene får vi feltet i posisjon (x, z):

$$\bar{e}(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \bar{E}(k_x, x, z) = e_0 \frac{x_0}{\bar{X}(z)} \exp\left[-jkz - (x/\bar{X}(z))^2\right]. \quad (6)$$

For å løyse integralet i (6) må vi bruke (3) pånytt, med ny integrasjonsvariabel $k_x' = k_x + 2jx/\bar{X}(z)^2$, der

$$\bar{X}(z)^2 = x_0^2(1 - jz/z_0) \quad (7)$$

$$\text{og} \quad z_0 = kx_0^2/2 = \pi x_0^2/\lambda. \quad (8)$$

Som vi skal sjå nedanfor (likning (11)) er z_0 lik avstanden frå midjen til strålebunten til den staden der diameteren til strålebunten er ein faktor $\sqrt{2}$ større enn ved midjen. z_0 blir kalla den konfokale parameteren til strålebunten. x_0 og z_0 er dei viktigaste parametrane til ein gausstrålebunt.
Feltamplituden blir

$$|\bar{e}(x,z)| = \frac{e_0}{\sqrt[4]{1 + (z/z_0)^2}} \exp\left(-\frac{(x/x_0)^2}{1 + (z/z_0)^2}\right), \quad (9)$$

som langt frå midjen ($|z| \gg z_0$) blir

$$|\bar{e}(x,z)| \approx e_0 \sqrt{\frac{z_0}{|z|}} \exp\left[-\left(\frac{xz_0}{x_0 z}\right)^2\right] \quad (10)$$

Likning (9) visar at feltet er gaussfordelt for alle z, og at 1/e-breidda til feltet blir

$$\Delta x = 2x_0\sqrt{1 + (z/z_0)^2}, \quad (11)$$

$$\text{og at} \quad \Delta x \approx 2x_0|z/z_0| = 4|z|/(kx_0) \quad \text{for} \quad |z| \gg z_0. \quad (12)$$

Dette svarar til ein opningsvinkel for strålene i bunten på

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{|z|} = \frac{2x_0}{z_0} = \frac{4}{kx_0} = \frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{2x_0} \approx \frac{\lambda}{2x_0} \quad (13)$$

Diffraksjonen gjer altså at ein gausstrålebunt som ved midjen har ei 1/e-breidd lik $2x_0$ divergerer med ein opningsvinkel på $4\lambda/(2\pi x_0)$, målt som 1/e-breidd av feltet. Sidan vi har føresett at $2x_0 >> \lambda$ så er divergensen liten og strålebunten er godt samla langs z-aksen.
Det gjeld generelt for lys som går gjennom ein opning med diameter D at lyset då langt frå opninga blir spreidd over ein vinkel på omlag λ/D. Tilsvarande, om ein vil konsentrere lys på eit område med liten diameter D treng ein stråler med ei vinkelspreiing på minst λ/D.
Fasen til feltet blir

$$\varphi(x,z) = \arctan(z/z_0)/2 - kz - \frac{(x/x_0)^2}{z_0/z + z/z_0} \tag{14}$$

som for $z >> z_0$ gjev $\varphi(x,z) \approx \pi/4 - kz - kx^2/(2z)$ (15)

Ein fasefront er ein kurve der fasen er konstant. På ein fasefront som skjer z-aksen i avstand z_1 frå origo gjev (14) for z nær z_1 at

$$k(z - z_1) \approx -\frac{(x/x_0)^2}{z_0/z_1 + z_1/z_0} = -\frac{kx^2}{2z_1 + 2z_0^2/z_1}, \tag{16}$$

som er likninga for ein parabel, men som også er likninga for ein sirkel med radius

$$R(z_1) = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1}, \tag{17}$$

sidan både $z - z_1$ og x er små samanlikna med R, når vi føreset at strålebunten er godt samla langs z-aksen, slik at $z_0 >> x_0$. Vi ser at radien R til fasefronten er minst for $z_1 = z_0$, og at fasefronten ved midjen er plan ($R = \infty$), i samsvar med (1). Vi ser også at langt frå origo er $R \approx z_1$, slik at det ser ut som bølgjene strålar ut frå origo.

For ein del lasertyper er gaussfordelinga ei svært god tilnærming til fordelinga av lyset i tverrsnittet av laserstrålen. I slike laserstråler er lyset gaussfordelt i både x- og y-retning, slik at vi i staden for likning (6) får fylgjande likning for feltstyrken:

$$\bar{e}(x,y,z) = e_0(x_0/\bar{X}(z))^2 \exp\left[-jkz - (x^2 + y^2)/\bar{X}(z)^2\right] \tag{18a}$$

Likninga ovanfor er for ein sirkulærsymmetrisk stråle. Ein kan også ha elliptiske gaussstråler slik at

$$\bar{e}(x,y,z) = e_0 \frac{x_0 y_0}{\bar{X}(z)\bar{Y}(z)} \exp\left[-jkz - (x/\bar{X}(z))^2 - (y/\bar{Y}(z))^2\right], \tag{18b}$$

med $\bar{Y}(z)^2 = y_0^2(1 - jz\lambda/(\pi y_0^2))$. (18c)