Transversale elektromagnetiske bølgjer langs transmisjonsliner

I eit homogent stoff har ein planbølgjer, der E-feltet og H-feltet står vinkelrett på kvarandre og på forplantningretninga. Vi seier at vi har transversale elektromagnetiske bølgjer (TEM-bølgjer). Slike bølgjer kan ein også ha langs ei transmisjonsline. For å få TEM-bølgjer må transmisjonslina vera perfekt rett, med idelle leiarar, slik at straumen går i overflata på leiarane. (Dersom leiarane ikkje er ideelle, slik at feltet trenger litt inn i dei, får ein ikkje reine TEM-bølgjer.) Vi representerer altså transmisjonslina med to rette, ideelle leiarar som ligg i z-retninga og fører like stor straum i kvar si retning. I analogi med planbølgjene i eit homogent stoff søker vi løysingar av Maxwells likningar der felta mellom leiarane kan skrivast

$$\mathbf{E}\,(x,y,z,t) = \mathbf{E}_t\,(x,y)\,u(t-z/v_p), \tag{1}$$

$$\mathbf{H}\,(x,y,z,t) = \mathbf{H}_t\,(x,y)\,u(t-z/v_p). \tag{2}$$

$\mathbf{E}_t$ og $\mathbf{H}_t$ er vektorfelt som då ligg i x-y-planet og ikkje er avhengig av z og t. $u\,(t-z/v_p)$ representerer bølgjene som går med fart v_p i positiv z-retning. Vi vel $u(t)$ dimensjonslaus, slik $\mathbf{E}_t$ og $\mathbf{H}_t$ har dimensjon elektrisk og magnetisk felt.

I likningane (1) og (2) har vi separert bølgjene som går langs transmisjonslina ut frå det som har å gjera med tverrsnittet av lina. Vi skal sjå nedanfor at når vi bare er interesserte i bølgjene kan vi gøyme alt som har med tverrsnittet å gjera i ein einaste parameter, *den karakteristiske impedansen.*

Etter Faradays lov har vi (om stoffet mellom leiarane har permittivitet ε og permeabilitet μ)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial_t \mathbf{H}. \tag{3}$$

Dersom vi set (1) og (2) inn i Faradays lov blir z-komponenten av likninga

$$\partial_x E_{ty} - \partial_y E_{tx} = 0, \tag{4}$$

medan i x-y-planet får vi

$$(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t)\,(-\dot{u}/v_p) = -\mu \mathbf{H}_t \dot{u}. \tag{5}$$

Likning (4) seier at $\mathbf{E}_t$ har curl lik null, og dermed at $\mathbf{E}_t$ kan skrivast som gradienten av eit statisk potensial som oppfyller laplacelikninga i 2 dimensjonar. Då vil begge komponentane av $\mathbf{E}_t$ også oppfylle laplacelikninga.

I likning (5) kan vi eliminere den deriverte $\dot{u}$ og få

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t = \mu v_p \mathbf{H}_t. \tag{6}$$

På same måten kan vi frå Ampère-Maxwells lov utleie at

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_t = -\varepsilon v_p \mathbf{E}_t. \tag{7}$$

Dei to siste likningane er dei same som gjeld for planbølgjer som går i z-retninga i eit homogent stoff, og medfører at $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ og $\hat{\mathbf{z}}$ står vinkelrett på kvarandre, at vektorane $\mathbf{E}_t$ og $\eta \mathbf{H}_t$ har same lengde, at bølgjefarten blir

$$v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}, \tag{8}$$

og bølgjeimpedansen blir

$$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \tag{9}$$

Induktansen L til ei straumsløyfe er definert som fluksen av B-feltet innanfor sløyfa dividert med straumen I langs sløyfa:

$$L = \frac{\mu}{I} \iint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu}{I} \int_z^{z+\Delta z} dz \int_{indre}^{ytre} dx H_y. \tag{10}$$

I (10) har vi valt integrasjonsflata for fluksen som eit rektangel med lengde Δz og som ligg i x-z-planet og som strekker seg frå den eine til den andre leiaren. Vi har definert induktansen for leidningsparet som totalfluksen mellom leiarane delt på totalstraumen I som går opp langs den eine og ned langs den andre leiaren (sjå figur nedanfor).

Frå (7)-(9) får vi at $H_y = E_x/\eta = E_x\sqrt{\varepsilon/\mu}$, og dermed

$$I = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}\Delta z}{L}\int_{indre}^{ytre} dx E_x = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}V}{L_l} = \frac{V}{Z_0}. \tag{11}$$

V er spenninga mellom inner- og ytterleiaren, L_l er induktans per lengde, og vi har definert den *karakteristiske impedansen*

$$Z_0 = v_p\left(L/\Delta z\right) = v_p L_l. \tag{12}$$

Ovanfor har vi gått gjennom utleiinga for bølgjer som går i positiv z-retning (oppover i figuren). For bølgjer som går nedover blir utleiinga den same, bortsett frå at vi får motsett forteikn på straumen, $I = -V/Z_0$, slik at vi kan skrive $V = V^+ + V^-$ og $I = (V^+ - V^-)/Z_0$. V og I oppfyller likningane

$$\begin{aligned} \partial_z V &= -\left(Z_0/v_p\right)\partial_t I & (13)\\ \text{og}\quad \partial_z I &= -\left(v_p Z_0\right)^{-1}\partial_t V, & (14) \end{aligned}$$

som har same form som likning (3.72a) og (3.72b) i innleiingskapitelet om plane bølgjer i læreboka.

Kontinuitetslikninga (3.41) i læreboka knyter saman straumtettleik $\mathbf{J}$ og ladningstettleik ρ: $\nabla\cdot\mathbf{J} = \partial_t\rho$.. For ein straum I langs ein leidning med lineladningstettleik ρ_l har denne likninga forma

$$\partial_z I = -\partial_t \rho_l. \tag{15}$$

Dersom ρ_l er lineladningstettleiken på innerleiaren og V er spenninga mellom innerleiar og ytterleiar, får vi frå (14) og (15) at *kapasitans per lengde* mellom innerleiaren og ytterleiaren blir

$$C_l = \rho_l/V = \left(v_p Z_0\right)^{-1}. \tag{16}$$

Frå (12) og (16) kan vi utleie

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} & (17)\\ \text{og}\quad v_p &= 1/\sqrt{L_l C_l}. & (18) \end{aligned}$$

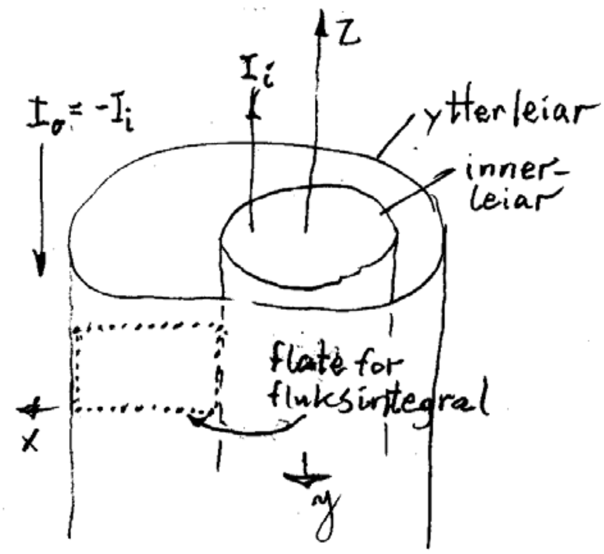

Figure 1: Magnetisk fluksintegral for transmisjonsline